תרגיל בית 3 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. יהי R חוג, ויהיו $I, J, K \lhd R$ אידאלים.

א. הוכיחו $(I \cap J)(I \cap J) \subseteq IJ \subseteq (I \cap J)$.

ב. הוכיחו $I(J+K) = IJ + IK$.

ג. הוכיחו את המודולריות של סריג האידאלים שהזכרנו בתרגול: אם $I \subseteq K$, אזי $I + (J \cap K) = (I + J) \cap K$.

שאלה 2. יהי $R = \mathbb{Z}[x]$, $I = \langle 2, x \rangle$ ו-$J = \langle 3, x \rangle$. הוכיחו כי $\{ij \mid i \in I, j \in J\}$ אינו אידאל של R.

שאלה 3. יהי R חוג, ויהי $I \lhd R$ אידאל. ראינו כי $M_n(I) \lhd M_n(R)$. הוכיחו

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$$

שאלה 4. בחוג $R = \mathbb{Z}[x, y]$ נסמן שלושה אידאלים:

$$I_0 = \langle x, y \rangle, \qquad I_1 = \langle x-1, y-3 \rangle, \qquad I_2 = \langle x-2, y-5 \rangle$$

א. הוכיחו שכל שניים מבין האידאלים הם קו־מקסימליים.

ב. הוכיחו ש-$R/I_1 \cong \mathbb{Z}$ (טענה זו נכונה גם ל-I_0 ול-I_2).

שאלה 5. הוכיחו את האיזומורפיזמים הבאים על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון (הסבירו כל צעד, כולל בניית ההומומורפיזם וחישוב הגרעין):

א. $\mathbb{Z}[x]/\langle p, x \rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ב. $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right]/5\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

שאלה 6. יהי R חוג.

א. יהיו $I, J \lhd R$ קו־מקסימליים. הוכיחו כי $I \cap J = IJ + JI$.

ב. יהיו $I, J, K \lhd R$ כך ש-I, K קו־מקסימליים וגם J, K קו־מקסימליים. הראו כי גם IJ, K קו־מקסימליים.

ג. הוכיחו באמצעות אינדוקציה על n את משפט השאריות הסיני ל-n אידאלים: יהי R חוג, ויהיו $I_1, \dots, I_n \lhd R$ אידאלים קו־מקסימליים בזוגות. אזי

$$R/_{I_1 \cap \cdots \cap I_n} \cong R/_{I_1} \times \cdots \times R/_{I_n}.$$

הסיקו שעבור חוג חילופי R ואידאלים כנ"ל מתקיים

$$R/_{I_1 \cdots I_n} \cong R/_{I_1} \times \cdots \times R/_{I_n}.$$

שאלה 7. מצאו $x \in \mathbb{Z}$ המקיים $x \equiv 2 \pmod 5$, $x \equiv 4 \pmod 7$ ו-$x \equiv 8 \pmod{11}$.

שאלה 8. יהיו $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ מספרים שונים, ויהיו $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$. הוכיחו, באמצעות משפט השאריות הסיני, כי קיימת פונקציה רציפה $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך ש-$f(a_i) = b_i$ לכל $1 \le i \le n$.

(הדרכה: בחוג הפונקציות הרציפות $C(\mathbb{R})$, שהפעולות בו הן חיבור נקודתי ומכפלה נקודתית, הסתכלו על אידאלים מהצורה $I_a = \{f \in C(\mathbb{R}) \mid f(a) = 0\}$ עבור $a \in \mathbb{R}$.)

שאלה 9. יהי R חוג חילופי. נסמן על ידי N את אוסף האיברים הנילפוטנטיים ב-R (תזכורת: איבר $a \in R$ הוא נילפוטנטי, אם קיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $a^n = 0$).

א. הוכיחו ש-N הוא אידאל של R.

ב. הוכיחו שב-$R/_N$ אין איברים נילפוטנטיים לא טריוויאליים (כלומר שונים מ-0).

ג. תנו דוגמה לחוג לא חילופי שבו N אינו אידאל.

בהצלחה!