תרגיל בית 10 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשע"ח

שאלה 1 (וידוא הגדרות). יהי R חוג ותהי $(M,+)$ חבורה אבלית. נניח שנתונה פעולה בינארית $\psi\colon R\times M\to M$ שנסמן אותה $\psi(r,m)=rm$ לאיברים $r\in R$, $m\in M$. נגדיר על החבורה האבלית $R\oplus M$ פעולת כפל לפי

$$(r+m)(r'+m')=rr'+rm'$$

הוכיחו שפעולת כפל זו הופכת את $R\oplus M$ לחוג בלי יחידה אם ורק אם ψ הופכת את M למודול מעל R.

שאלה 2 (חימום). יהי R חוג. הוכיחו שהקבוצות הבאות הן תת־מודולים של R^n (שהוא מודול מעל R):

א. $\{(a,\dots,a)\in R^n \mid a\in R\}$.

ב. $\{(a_1,\dots,a_n)\in R^n \mid a_1+\dots+a_n=0\}$.

ג. $I_1\times\dots\times I_n$ כאשר I_i הם אידאלים של R.

שאלה 3. תזכורת: אם V מרחב וקטורי מעל שדה F וישנה העתקה לינארית $T\colon V\to V$, אז ל-V יש מבנה של מודול מעל $F[x]$ על ידי הגדרת הכפל $f(x)\cdot v=f(T)(v)$.
יהי $M=\left(\mathbb{R}^2,T\right)$ מודול מעל $\mathbb{R}[x]$ כאשר T היא ההטלה על ציר ה-y, כמו בתזכורת. הוכיחו כי תת־המודולים היחידים של M הם $\mathbb{R}^2$, ציר ה-x, ציר ה-y ו-$\{(0,0)\}$.

שאלה 4. הוכיחו כי $\mathbb{Q}$ אינו חופשי כמודול מעל $\mathbb{Z}$.

שאלה 5. נראה כיוון הפוך לטענה שראינו בכיתה: יהי M מודול מעל חוג מנה R/I. הוכיחו כי M הוא מודול מעל R לפי הפעולה $rm:=(r+I)m$. בנוסף הוכיחו $I\subseteq \operatorname{Ann}_R(M)$.

שאלה 6. יהי R חוג חילופי, ויהי M מודול מעל R.

א. הוכיחו שאם M חופשי, אז $\operatorname{Ann}_R(M)=\{0_R\}$ ו-$\operatorname{Tor}(M)=\{0_M\}$.

ב. הוכיחו שאם כל אידאל $I\lhd R$ הוא חופשי כמודול מעל R, אז R הוא תחום ראשי.

שאלה 7. יהי R חוג, ויהי $x\in R$. הוכיחו שיש איזומורפיזם של מודולים $Rx\cong R/\operatorname{Ann}_R(x)$.

שאלה 8. יהי R חוג ויהיו אידאלים שמאליים $L,L'\le_l R$. בכיתה ראינו מסקנה לפיה אם R חילופי, אז $R/L\cong R/L'$ איזומורפיים כמודולים מעל R אם ורק אם $L=L'$.
הפריכו את המסקנה אם R אינו חילופי. רמז: אפשר לבחור $R=M_2(\mathbb{Q})$, $L=Re_{11}$ ו-$L'=Re_{22}$.

שאלה 9 (העשרה). נסו להבין כמה שיותר מהדוגמאות בערך הומומורפיזם של מודולים בויקיפדיה, במיוחד לגבי חוגי אנדומורפיזמים.

בהצלחה!