

תרגיל בית 5 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תש"ף

תרגיל 1 (חימום). תהי K/F הרחבת שדות ספרבילית, ויהי L שדה ביניים. הוכיחו כי גם L/F וגם K/L ספרביליות.

שאלה 2. קבעו האם הפולינומים הבאים ספרביליים.

א. $x^3 - 6x^2 + 12x - 8$ מעל \mathbb{Q} .

ב. $x^5 - 3x^3 - 2x^2 + 2x + 2$ מעל \mathbb{Q} .

ג. $x^{10} + x^5 + 3$ מעל \mathbb{F}_5 .

ד. $x^p - x + a$ מעל שדה F ממאפיין $p > 0$ (שפגשנו כבר בכיתה).

שאלה 3. תהי K/F הרחבת שדות ויהיו $f, g \in F[x]$ פולינומים עם שדות פיצול L_1, L_2 בהתאמה. הוכיחו כי תת-השדה הכי קטן של K שמכיל את L_1 ו- L_2 הוא גם שדה פיצול מעל F (אולי של פולינום אחר).

שאלה 4. יהי פולינום $f(x) \in F[x]$, ויהיו $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כל שורשי הפולינום. הוכיחו כי שדה הפיצול של $f(x)$ מעל F הוא $F[\alpha_2, \dots, \alpha_n]$.

שאלה 5. תהי K/F הרחבת שדות ממימד 2. הסיקו מהשאלה הקודמת ש- K הוא שדה פיצול של פולינום כלשהו ב- $F[x]$.

שאלה 6 (רשות). יהי $f = x^5 + x^3 + x + 1 \in F[x]$. הוכיחו כי f ספרבילי אם ורק אם $\text{char } F \neq 11, 37$.

בהצלחה!