שיעורי בית 4

1. הוכח/הפרך כי H היא ת"ח של G במקרים הבאים

(א) $H = \{a + ai \mid a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C} = G$ (הפעולה היא חיבור מספרים מרוכבים)

(ב) $H = m\mathbb{Z}_n = \{mz \mid z \in \mathbb{Z}_n\} \subseteq \mathbb{Z}_n = G$ (הפעולה היא חיבור מודלו n)

(ג) $H = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} \mid |A| \neq 0\} \subseteq \mathbb{F}^{n\times n} = G$ (הפעולה היא חיבור מטריצות)

(ד) תהא G חבורה ו $n \in \mathbb{N}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$ (הפעולה היא הפעולה של G)

(ה) תהא G חבורה חילופית ו $n \in \mathbb{Z}$. $H = \{g^n | \, g \in G\}$ (הפעולה היא הפעולה של G)

(ו) $H = \{x^2 \mod 4 | x \in \mathbb{Z}_4\} \subseteq \mathbb{Z}_4$(הפעולה היא חיבור מודלו 4)

(ז) $H = \{x^3 \mod 5 | x \in \mathbb{Z}_5\} \subseteq \mathbb{Z}_5$(הפעולה היא חיבור מודלו 5)

(ח) $H = \left\{\frac{a}{b} \,|\, a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{N},\, \frac{b}{4} \in \mathbb{N}\right\} \subseteq \mathbb{Q}$ (הפעולה היא חיבור מספרים רציונאליים)

(ט) $G = GLn(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : \det(A) \neq 0\}$ חבורת המטריצות ההפיכות (הפעולה היא כפל מטריצות) $H = SL_n(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n} : \det(A) = 1\}$ המטריצות עם דטרמיננטה שווה 1.

2. כתבו את כל תתי החבורות של $G = S_3$.

3. לכל $\sigma \in S_n$ נגדיר $\sigma(I) \in \mathbb{F}^{n\times n}$ להיות מטריצה $n\times n$ שמתקבלת ממטריצת היחידה ע"י הפעלת התמורה על השורות. כלומר

$$R_i(\sigma(I)) = e_{\sigma^{-1}(i)}$$

כאשר $R_i(\sigma(I))$ מסמל את השורה ה i ית של המטריצה $\sigma(I)$.
למשל אם $\sigma = (1,2,4) \in S_4$ [$\Leftarrow$ $\sigma^{-1} = (4,2,1)$] אזי

$$\sigma(I) = \begin{pmatrix} & & & 1 \\ 1 & & & \\ & & 1 & \\ & 1 & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & e_4 & - \\ - & e_1 & - \\ - & e_3 & - \\ - & e_2 & - \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & e_{\sigma^{-1}(1)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(2)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(3)} & - \\ - & e_{\sigma^{-1}(4)} & - \end{pmatrix}$$

במילים אחרות. הוקטור e_i (ששוה לשורה ה i ית של I) עובר לשורה $\sigma(i)$.
הוכיחו כי $H = \{\sigma(I)\ :\ \sigma \in S_n\}$ תת חבורה של $GLn(\mathbb{F}) = \{A \in \mathbb{F}^{n\times n}\ :\ \det(A) \neq 0\}$ המטריצות ההפיכות (שימו לב שהפעולה היא כפל מטריצות) .

4. תהא G עם $n > 2$ איברים. הוכח כי לא קיימת $H \leq G$ עם $n-1$ איברים.

5. תהא G חבורה. $H_1, H_2 \leq G$ תתי חבורות. אזי $H_1 \cap H_2$ גם כן חבורה.

6. תהא G חבורה $H_1, H_2 \leq G$ הוכח כי

$$[H_1 \subseteq H_2 \vee H_2 \subseteq H_1] \iff [H_1 \cup H_2 \leq G]$$