חדו"א 1 תרגיל מספר 10 תשפ"א - פולינום טיילור

ענו על השאלות הבאות:

חלק א

1. מצאו קירוב של המספר $e^{\frac{3}{8}}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.
2. מצאו קירוב של המספר $\sqrt{26}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.
3. נגדיר $f(x) = \cos(4x)$ ונרצה לחשב $f(2) = \cos(8)$ בעזרת פיתוח פולינום טיילור סביב הנקודה $x_0 = 0$. נסמן ב $P_n(x)$ את פולינום טיילור של $f(x)$ סביב $x_0 = 0$ מסדר n ונסמן $R_n = f(2) - P_n(2)$ את שגיאת הקירוב. הוכיחו כי $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$ (כלומר מקבלים קירוב יותר טוב(או שגיאה יותר קטנה) כאשר נפתח את פולינום טיילור לסדר יותר גבוה).
4. הוכיחו כי לכל x ממשי מתקיים $|\sin(6x+2) - (6x+2)| \le \frac{|6x+2|^3}{6}$
5. הוכיחו שלכל x חיובי מתקיים $\ln(1+6x) < 6x$

חלק ב

1. תהיינה f, g גזירות $n+1$ פעמים בכל $\mathbb{R}$ המקיימות $f^{(k)}(0) = g^{(k)}(0)$ לכל $0 \le k \le n$. הוכיחו/הפריכו:

   (א) אם לכל $x > 0$ מתקיים $f^{(n+1)}(x) > g^{(n+1)}(x)$ אז לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > g(x)$

   (ב) אם לכל $x > 0$ מתקיים $f(x) > g(x)$ אז לכל $x > 0$ מתקיים $f^{(n+1)}(x) > g^{(n+1)}(x)$
2. יהא n טבעי. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $\sum_{k=0}^{2n} \frac{x^k}{k!} = 0$ וכמה פתרונות יש למשוואה $\sum_{k=0}^{2n+1} \frac{x^k}{k!} = 0$.
   הדרכה: הסתכלו בפיתוח טיילור של e^x

בהצלחה! ☺