

**מד"ר למתמטיקאים 88240 – תרגיל מס' 1 – קיץ תשע"ב**

**מד"ר מסדר ראשון: שיטות פתרון, בעיות התחלה ומשפט קיום ויחידות**

1. פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $y' + \frac{1}{x}y = 3\cos(2x), \quad x > 0$

ב.  $2ydx - xdy = 0$

ג.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 3y^2}{2xy}$

ד.  $y' + 3y = x + e^{-2x}$

ה.  $(x^2 + 3xy + y^2)dx - x^2dy = 0$

ו.  $x^2y' + 2xy - y^3 = 0$

ז.  $\frac{dy}{dx} = \frac{x - e^{-x}}{y + e^y}$

ח.  $y' = \cos^2 x \cos^2 2y$

ט.  $(3 + y + 2y^2 \sin^2 x)dx + (x + 2xy - y \sin(2x))dy = 0$

י.  $2x^3y' = y(y^2 + 3x^2)$

יא.  $\frac{dy}{dx} = e^{x+y} - 1$

2. פתרו את בעיות ההתחלה הבאות. האם יש לכל בעיה פתרון יחיד? אם כן, ציינו תחום הגדרה של פתרון יחיד זה.

א. 
$$\begin{cases} (xy + x)dx = (x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1)dy \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

ב. 
$$\begin{cases} y^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}dy = \arcsin x dx \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$$y' + \frac{2}{x}y = \frac{\cos x}{x^2}, \quad x > 0 \quad .ג.$$

$$y(\pi) = 0$$

$$(3xy + 3y - 4)dx + (x+1)^2 dy = 0 \quad .ד.$$

$$y(0) = 1$$

$$\text{האם משפט הקיום והיחידות מתקיים כאן?} \quad \begin{cases} ydx + x(1+x^2y^2)dy = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \quad .ה.$$

$$\text{כיצד מסקנתכם מתיישבת עם משפט הקיום} \quad \begin{cases} y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2 \\ y(1) = 2 \end{cases} \quad .ו.$$

והיחידות?

3. פתרו את המשוואות הבאות (שימו לב: כאן ייתכן ותדרשו להפעיל שני שלבים או יותר כדי לפתור את המשוואה):

$$y' = \frac{(1+y)^2}{x(y+1) - x^2} \quad .א.$$

$$y' = \frac{y}{3x - y^2} \quad .ב.$$

(רמז: נסו לכתוב את המשוואה כך שהנעלם יהיה  $x(y)$ ).

$$(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0 \quad .ג.$$

$$xy^2(xy' + y) = 1 \quad .ד.$$

$$(6x + y^2)dx + y(2x - 3y)dy = 0 \quad .ה.$$

$$(x^2 + 3 \ln y) ydx = xdy \quad .ו.$$

4. א. גוף מסוים בעל טמפרטורה  $T_0 = 200^\circ C$  (מעלות צלסיוס) שמים בסביבה

$$\text{בעלת טמפרטורה שמשתנה עם הזמן לפי החוק הבא: } f(t) = 100^\circ \cdot e^{-\alpha t}$$

כאשר  $\alpha > 0$  הוא פרמטר הסביבה.

ידוע **החוק (של ניוטון)**: קצב שינוי הטמפרטורה של הגוף בסביבה הוא פרופורציונאלי להפרש בין הטמפרטורות של הסביבה ושל הגוף.

בהנחה כי מקדם הפרופורציה הוא  $k = 2$ , מצאו את טמפרטורת הגוף  $T(t)$  לכל  $t \geq 0$ .

ב. כדור עשוי ממלח בעל מסה של  $M_0 = 100g$  נופל ממנוחה (ללא מהירות

התחלתית) במים חמים ומאבד כל שניה  $1g$  מהמסה שלו. כוח ההתנגדות לנפילתו

פרופורציונלי למהירות הנפילה עם מקדם הפרופורציה  $k = 2$ .

מצאו את מהירות הנפילה ברגע שבו מסת הכדור תהיה מחצית ממסתו ההתחלתית.  
הדרכה: היעזרו בחוק השני של ניוטון מהמכניקה הקלאסית:  $\sum \vec{F} = m\vec{a}$  ובקשרים (הידועים) בין המהירות והתאוצה במקרה שהם תלויים בזמן.

5. פתרו את המשוואות הבאות:

א.  $(2x + y \cos(xy))dx + x \cos(xy)dy = 0$

ב.  $v(2uv^2 - 3)du + (3u^2v^2 - 3u + 4v)dv = 0$

ג. מצאו פתרון כללי למשוואה:  $\frac{dy}{dx} = \frac{2 \cos^2 x - \sin^2 x + y^2}{2 \cos x}$  בהינתן כי

$y_1(x) = \sin x$  הוא פתרון פרטי שלה.

ד.  $(3x^2y + 2xy + y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$

ה.  $(3x + \frac{6}{y})dx + (\frac{x^2}{y} + 3\frac{y}{x})dy = 0$

ו. פתרו את המשוואה הבאה בשתי דרכים שונות:  $y(8x - 9y)dx + 2x(x - 3y)dy = 0$

ז.  $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$

6. נתונה המשוואה:  $(x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0$

א. תיארו תהליך לקבלת גורם אינטגרציה של המשוואה בצורה:  $\mu = \mu(x^2 + y^2)$ . עליכם לחזור על התהליך המלא לקבלת גורם אינטגרציה מהרצאה (הציבו  $z = x^2 + y^2$  והשתמשו בכלל שרשרת).

ב. פתרו את בעיית ההתחלה:  $\begin{cases} (x^2 + y^2 + x)dx + ydy = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ . האם יש לבעיה הנייל

פתרון יחיד? אם מצאתם פתרון יחיד, בטאו אותו באופן מפורש בצורה  $y = y(x)$ .

7. נתונה בעיית ההתחלה:  $\begin{cases} (1 + y^2 + xy^2)dx + (x^2y + y + 2xy)dy = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

א. האם משפט הקיום והיחידות מתקיים עבור בעיה זו?

ב. נסו לפתור את הבעיה באמצעות השיטות שלמדנו.

ג. מהי מסקנתכם משני הסעיפים הקודמים: האם יש פתרון לבעיה? האם הוא יחיד?