

תרגיל בית 11 – טופולוגיה 2013

שאלה 1

- א. הראו שלכל טופולוגיה יש בסיס.
ב. הראו שאם B_1 הוא אוסף של קבוצות פתוחות במרחב (X, τ) , המכיל בסיס B_2 ל- τ , אזי B_1 הוא בעצמו בסיס ל- τ .
ג. יהיו τ_1, τ_2 טופולוגיות על X . יהי B_1 בסיס ל- (X, τ_1) . אזי: $\tau_1 \subseteq \tau_2$ אם ורק אם $B_1 \subseteq \tau_2$.

שאלה 2

- א. יהיו X, Y מ"ט. יהיו $F \subseteq X, G \subseteq Y$ סגורות. הוכיחו כי הקבוצה $F \times G$ סגורה ב- $X \times Y$.
ב. יהיו X, Y מ"ט, $A \subseteq X, B \subseteq Y$. הוכיחו כי $\overline{A \times B} = \overline{A} \times \overline{B}$.
ג. יהי (X, τ_{cof}) מ"ט אינסופי עם הטופולוגיה הקוסופית. נסמן ב- τ את טופולוגיית המכפלה על $X \times X$. האם τ היא הטופולוגיה הקוסופית על $X \times X$? הוכיחו או הפריכו!

שאלה 3

- יהי X מ"ט. נגדיר את האלכסון של $X \times X$ להיות $\Delta = \{(x, x) : x \in X\}$. הראו שאם Δ סגור ב- $X \times X$ אזי X הוא האוסדורף. [שימו לב שאת הכיוון השני של הטענה הזו הוכחנו בתרגול].

שאלה 4

- יהיו X_1, X_2 מרחבים טופולוגיים. הוכיחו ש- $X_1 \times X_2 \cong X_2 \times X_1$.

שאלה 5

תהי $X = \mathbb{N} \cup \{0\}$ קבוצה ונגדיר שני אוספים של תתי קבוצות של X :
 $B_1 = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots\}$, $B_2 = \{Z \subseteq X : X \setminus Z = \{1, 2, 3, \dots, n\} \text{ עבור } n \text{ כלשהו}\}$

- א. הוכיחו כי $B = B_1 \cup B_2$ הוא בסיס לטופולוגיה כלשהי τ על X .
ב. הוכיחו ש- (X, τ) הוא מרחב טופולוגי האוסדורף.

שאלה 6

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה והפיכה. הוכיחו ש- f הומיאומורפיזם.

הדרכה מומלצת: (אפשר גם אחרת ☺)

א. הראו שלכל $a < b$ קיימים $c < d$ כך ש- $f[a, b] = [c, d]$; בנוסף,

ב. $f(a) = c$ וגם $f(b) = d$ או $f(a) = d$ וגם $f(b) = c$

[כלומר, f (במקרה הזה) מעבירה שפה לשפה].

ג. הסיקו ש- f פתוחה ולכן גם הומיאומורפיזם.

בהצלחה!