פתרון המבחן בקישור הבא.

2. א. חשבו: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}\right)$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+1+xe^x-2e^x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-e^x+1}{3x^2}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+xe^x-e^x}{6x}=\frac{e^x}{6}=\frac{1}{6}$$

ב. חשבו: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+2x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}-\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right)=\lim_{x\to\infty}x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}-\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)=\{\infty\cdot 0\}=?$$

שיטה זו של הוצאת הגורם המשמעותי לא ממש עזרה.

נפתח קצת (הרבה) את הביטוי בתוך הגבול:

$$\sqrt[3]{x^3+2x}-\sqrt{x^2-2x}=\frac{\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}-(x^2-2x)}{\sqrt[3]{x^3+2x}+\sqrt{x^2-2x}}$$

הפעם נכפול ונחלק בצמוד שנותן חזקת 3, כלומר

$$(a-b)(a^2+ab+b^2)=a^3-b^3$$

$$\frac{\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}-(x^2-2x)}{\sqrt[3]{x^3+2x}+\sqrt{x^2-2x}}=\frac{(x^3+2x)^2-(x^2-2x)^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+2x}+\sqrt{x^2-2x}\right)\left(\sqrt[3]{(x^3+2x)^4}+\sqrt[3]{(x^3+2x)^2}(x^2-2x)+(x^2-2x)^2\right)}=$$

$$=\frac{x^6+4x^4+4x^2-(x^4-4x^3+4x^2)(x^2-2x)}{\left(\sqrt[3]{x^3\left(1+\frac{2}{x^2}\right)}+\sqrt{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)}\right)\left(\sqrt[3]{x^{12}\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^4}+\sqrt[3]{x^6\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^2}x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)+x^4\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{x^6+4x^4+4x^2-(x^6-2x^5-4x^5+4x^4+4x^4-8x^3)}{x\left(\sqrt[3]{1+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1-\frac{2}{x}}\right)x^4\left(\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^4}+\sqrt[3]{\left(1+\frac{2}{x^2}\right)^2}\left(1-\frac{2}{x}\right)+\left(1-\frac{2}{x}\right)^2\right)}=$$

$$=\frac{x^5\left(6-\frac{8}{x}+\frac{8}{x^2}+\frac{4}{x^3}\right)}{x^5\left((1+1)(1+1+1)\text{ משהו ששואף ל}\right)}\to_{x\to\infty}\frac{6}{6}=1$$

הערה: היה אפשר מראש לכפול ישר בצמוד של בשישית.

$$(a-b)(a^5+a^4b+a^3b^2+a^2b^3+ab^4+b^5)=a^6-b^6$$

א. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+\sin(n^2)}{n^2}$

נעזר בשני טורים

$$\sum \frac{(-1)^n n}{n^2} = \sum \frac{(-1)^n}{n}$$

הוא מתכנס בתנאי.

$$\sum \frac{\sin(n^2)}{n^2}$$

בערך מוחלט מתקיים כי $\frac{|\sin(n^2)|}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ ולכן הטור מתכנס בהחלט.

סכום של מתכנסים הוא מתכנס, ולכן הטור כולו מתכנס.

אבל, אם הטור בשאלה היה מתכנס בהחלט, אז גם הטור פחות הטור השני היה מתכנס בהחלט כצירוף של מתכנסים בהחלט, והיינו מקבלים שהטור הראשון ששווה להפרש הטורים היה מתכנס בהחלט למרות שהוא מתכנס בתנאי.

סה"כ הטור מתכנס בתנאי.

דרך נוספת להראות מדוע הטור אינו מתכנס בהחלט

$$\left|(-1)^n \frac{n+\sin(n^2)}{n^2}\right| = \frac{n+\sin(n^2)}{n^2}$$

זה חבר של $\sum \frac{1}{n}$ ולכן מתבדר.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

נפעיל את מבחן המנה

$$\frac{\left((n+1)!\right)^2}{\left(2(n+1)\right)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)} \to \frac{1}{4} < 1$$

ולכן הטור מתכנס בהחלט.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^n}{(n!)!}$

שוב נפעיל מבחן המנה

$$\frac{(n+1)^{n+1}}{\left((n+1)!\right)!} \cdot \frac{(n!)!}{n^n} = (n+1) \cdot \underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}_{\to e} \cdot \frac{(n!)!}{\left((n+1)!\right)!} \to 0$$

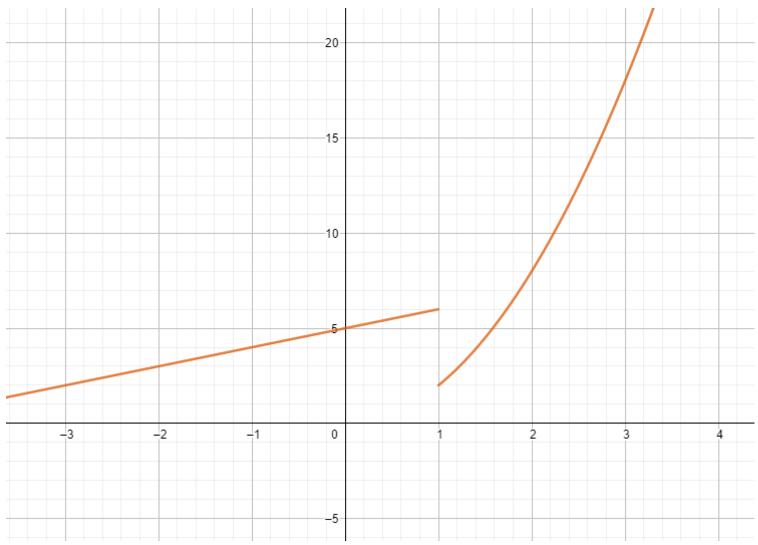
המעבר האחרון מוכח בשורה הבאה:

$$\frac{(n+1)(n!)!}{\left((n+1)!\right)!}=\frac{(n+1)\cdot 1\cdot 2\cdots n!}{1\cdot 2\cdots n!\cdot (n!+1)\cdots\left((n+1)!\right)}=\frac{n+1}{(n!+1)\cdots\left((n+1)!\right)}=\frac{1}{(n!+1)\cdots\left((n+1)!-1\right)(n!)}\to 0$$

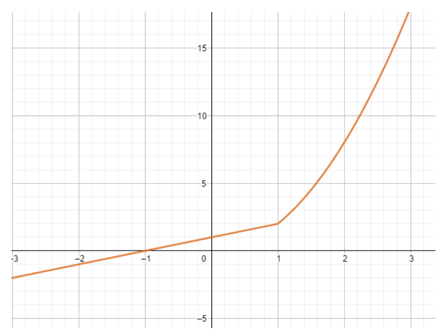
כיוון שהמנה שאפה לאפס שקטן מ1 הטור מתכנס בהחלט.

4. נגדיר $f(x)=\begin{cases} ax+b\,, x\le 1 \\ 2x^2\,,\ x>1 \end{cases}$ מצאו את כל המספרים a וb כך ש:

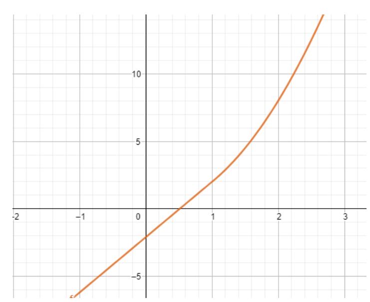
א. f רציפה בכל $\mathbb{R}$. ב. f גזירה (או דיפרנציאבילית) בכל $\mathbb{R}$. ג. f גזירה (או דיפרנציאבילית) פעמיים בכל $\mathbb{R}$.



כיצד היא תהיה רציפה (לפי הציור)?



כיצד היא תהיה גזירה (לפי הציור)?



בכל נקודה פרט לנקודת התפר, הפונקציה רציפה וגזירה אינסוף פעמים).

לצורך רציפות צריך שהגבול מימין יהיה שווה לגבול משמאל ושווה לערך בנקודה.

$$f(x)=\begin{cases}2x^2 & x>1\\ ax+b & x\le 1\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-} ax+b=a+b$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+} 2x^2=2$$

$$f(1)=a+b$$

בשביל רציפות צריך ש

$$a+b=2$$

בשביל גזירות צריך שגבול שיפועי המיתרים יהיה קיים וסופי, ובכל מקרה חייבים לפחות רציפות ולכן נדרוש $a+b=2$.

$$f'(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-2}{x-1}$$

נחשב גבולות מימין ומשמאל על מנת לדעת למה שווה $f(x)$, אנחנו צריכים ששני הגבולות החד צדדיים של שיפועי המיתרים יהיו קיימים, סופיים ושווים.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{ax+b-2}{x-1}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to 1^-}\frac{a}{1}=a$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}2(x+1)=4$$

בשביל גזירות צריך:

1. $a+b=2$
2. $a=4$

על מנת לבדוק את הנגזרת השנייה, צריך קודם כל לרשום במסודר את הנגזרת הראשונה כפונקציה מפוצלת

$$f(x)=\begin{cases}4x & x>1\\ 4 & x=1\\ 4 & x<1\end{cases}$$

נחשב את גבול שיפועי המיתרים של הנגזרת

$$f''(1)=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-4}{x-1}$$

נחשב את הגבולות החד צדדיים של שיפועי המיתרים

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-4}{x-1}=4$$

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{4-4}{x-1}=0$$

ולכן גבול שיפועי המיתרים בנקודה לא קיים, כי הגבולות החד צדדיים שונים, ולכן הפונקציה אינה גזירה פעמיים בנקודה לעולם.

הרי על מנת להיות גזירה פעמיים, צריך להיות גזירה לפחות פעם אחת, וזה קרה במקרה יחיד בו גילינו שאין נגזרת שנייה.

5. נניח שהפוקנציה f(x) מוגדרת ורציפה בקטע פתוח (a,b) , ונניח ש$x_1, x_2, \dots x_n$ הן נקודות כלשהן ב(a,b). הוכיחו שקיימת $c \in (a,b)$ כך ש$f(c) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \frac{1}{n}\big(f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_n)\big) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

נסמן שהמקסימום מבין $\{f(x_1), \dots, f(x_n)\}$ מתקבל ב$f(x_i)$ והמינימום ב$f(x_j)$

$$f(x_j) = \frac{f(x_j) + \cdots . + f(x_j)}{n} \leq \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq \frac{f(x_i) + \cdots + f(x_i)}{n} = f(x_i)$$

לפי משפט ערך הביניים, קיימת נקודה c בקטע שבין x_i לx_j בה

$$f(c) = \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

הסבר:

$$h(x) = f(x) - \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n}$$

$$h(x_i) = f(x_i) - \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \geq 0$$

$$h(x_j) = f(x_j) - \frac{f(x_1) + \cdots + f(x_n)}{n} \leq 0$$