

# פתרון תרגיל 3

## שאלה 1

- א.  $n$  משתנים  
 ב. אין הגבלה על מספר המשוואות  
 ג. אינסוף

## שאלה 2

ק. למשל למערכת בת משוואה אחת  $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$ , כל שלשה  $(x_1, x_2, x_3)$  מהווה פתרון.

## שאלה 3

א. נתון ש- $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$  הוא פתרון של המערכת

$$\text{ולכן, } \begin{cases} \alpha_{11}x_1 + \dots + \alpha_{1n}x_n = 0 \\ \alpha_{21}x_1 + \dots + \alpha_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}x_1 + \dots + \alpha_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

מתקיים

$$\text{נכפול את כל השווייונות בסקלר } \lambda \text{ ונקבל: } \begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \dots + \alpha_{2n}\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{mn}\gamma_n = 0 \end{cases}$$

אולם פירושם של השווייונות הללו הוא שה- $n$  יהיה

$$\begin{cases} \alpha_{11} \cdot \lambda \gamma_1 + \dots + \alpha_{1n} \cdot \lambda \gamma_n = 0 \\ \alpha_{21} \cdot \lambda \gamma_1 + \dots + \alpha_{2n} \cdot \lambda \gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1} \cdot \lambda \gamma_1 + \dots + \alpha_{mn} \cdot \lambda \gamma_n = 0 \end{cases}$$

$\lambda c = (\lambda \gamma_1, \dots, \lambda \gamma_n)$  פותרת את המערכת.

ב. יהיו  $c = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ ,  $d = (\delta_1, \dots, \delta_n)$  שני פתרונות של המערכת הנתונה ולכן

מתקיימים השווייונות:

$$\text{נחבר את } \begin{cases} \alpha_{11}\delta_1 + \dots + \alpha_{1n}\delta_n = 0 \\ \alpha_{21}\delta_1 + \dots + \alpha_{2n}\delta_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\delta_1 + \dots + \alpha_{mn}\delta_n = 0 \end{cases}, \begin{cases} \alpha_{11}\gamma_1 + \dots + \alpha_{1n}\gamma_n = 0 \\ \alpha_{21}\gamma_1 + \dots + \alpha_{2n}\gamma_n = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}\gamma_1 + \dots + \alpha_{mn}\gamma_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_{11}(\delta_1 + \gamma_1) + \dots + \alpha_{1n}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \\ \alpha_{21}(\delta_1 + \gamma_1) + \dots + \alpha_{2n}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{m1}(\delta_1 + \gamma_1) + \dots + \alpha_{mn}(\delta_n + \gamma_n) = 0 \end{cases} \text{ שתי המערכות ונקבל:}$$

כלומר, ה- $n$  ייה  $c + d = (\gamma_1 + \delta_1, \dots, \gamma_n + \delta_n)$  פותרת את המערכת.

ג. אם  $c, d$  הם פתרונות של המערכת אזי  $\lambda_1 c, \lambda_2 d$  הם גם פתרונות על פי א'. אבל אז, על פי ב', גם  $\lambda_1 c + \lambda_2 d$  הוא פתרון של המערכת.

ד. התכונות הללו הן נחלתן של המערכות ההומוגניות. על מנת להראות שאינן מתקיימות במערכות לא הומוגניות, מספיק להביא דוגמא נגדית:

$(1,4), (2,3)$  שניהם פתרונות של  $x + y = 5$  אבל  $(1,4) + (2,3) = (3,7)$  אינו פתרון של המשוואה כי  $3 + 7 = 10 \neq 5$ .

$(1,4)$  פתרון של  $x + y = 5$  כאמור אבל  $2 \cdot (1,4) = (2,8)$  אינו פתרון של משוואה זו.

#### שאלה 4

א) נוכיח תחילה שקיימים  $m, n \in \mathbb{N}$  כך ש  $m < n$  ו  $m \cdot 1_F = n \cdot 1_F$ . אמנם, אחרת נקבל שהקבוצה  $\{k \cdot 1_F \mid k \in \mathbb{N}\}$  אינסופית. אבל  $\{k \cdot 1_F \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq F$  ו סופית לכן גם  $\{k \cdot 1_F \mid k \in \mathbb{N}\}$  סופית וקיבלנו סתירה. מכאן קיימים  $m, n \in \mathbb{N}$  כך ש  $m < n$  ו  $m \cdot 1_F = n \cdot 1_F$ . ניתן להסיק מכאן ש  $(n - m) \cdot 1_F = 0_F$  ברור ש  $n - m \in \mathbb{N}$  ולכן  $\text{char}(F) > 0$ .

ב) מכיון שהמאפיין אינו אפס מתקיים בהכרח  $\text{char}(F) = p$  עובר איזשהו ראשוני  $p$ . נראה שבקבוצה  $A = \{k \cdot 1_F \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$  יש בדיוק  $p$  איברים.

יהי  $k \in \mathbb{N}$  אזי ניתן לחלק את  $k$  ב  $p$  ולקבל שארית בין 0 ל  $p - 1$ .

כלומר קיימים  $t, m \in \mathbb{N}$  ו  $0 \leq r \leq p - 1$  כך ש  $k = mp + r$ . קל לראות ש

$k \cdot 1_F = r \cdot 1_F$  (זכרו ש  $\text{char}(F) = p$ ) לכן  $A = \{k \cdot 1_F \mid 0 \leq k \leq p - 1\}$ .

בהכרח אם  $0 \leq k \neq s \leq p-1$  נקבל ש  $k \cdot 1_F \neq s \cdot 1_F$  (למה? רמז: נקבל סתירה להגדרת המאפיין כטבעי המינימלי כך ש...).

לכן ב  $A = \{k \cdot 1_F \mid 0 \leq k \leq p-1\}$  יש בדיוק  $p$  איברים שונים. מתקיים:

$$1_F \in A \subseteq F \quad (1)$$

(2) אם  $k \cdot 1_F, s \cdot 1_F \in A$  כך ש  $s \cdot 1_F \neq 0_F$  אזי  $(p-s) \cdot 1_F = -(s \cdot 1_F)$  ומתקיים

$$k \cdot 1_F - s \cdot 1_F = (k + p - s) \cdot 1_F \in A$$

כמו כן מכיון ש  $s \cdot 1_F \neq 0_F$  אז קיים  $1 \leq m \leq p-1$  כך ש  $(m \cdot 1_F) \cdot (s \cdot 1_F) = 1_F$ .

הסבר: דומה לחלוטין להוכחת הופכי בשדה  $\mathbb{Z}_p$  (הסתכלו בהרצאה). מכיון

שהקבוצה  $A$  סגורה לכפל אז אם לא קיים  $1 \leq m \leq p-1$  כך ש

$$(m \cdot 1_F) \cdot (s \cdot 1_F) = 1_F \quad 1 \leq m \neq t \leq p-1$$

ש  $(m \cdot 1_F) \cdot (s \cdot 1_F) = (t \cdot 1_F) \cdot (s \cdot 1_F)$  (למה?) ולכן בהכרח קיים

$$1 \leq m \leq p-1 \quad \text{כך ש} \quad (m \cdot 1_F) \cdot (s \cdot 1_F) = 1_F \quad \text{כלומר} \quad (s \cdot 1_F)^{-1} = m \cdot 1_F \quad \text{ומכאן}$$

$$(k \cdot 1_F)(s \cdot 1_F)^{-1} = (km) \cdot 1_F \in A$$

עפ"י הקריטריון של תת שדה נסיק ש  $A$  תת שדה של  $F$ .

הערה: לכל  $0 \leq m, s \leq p-1$  מתקיים

$$m \cdot 1_F + s \cdot 1_F = ((m+s) \bmod p) \cdot 1_F$$

(בדקו!)  $(m \cdot 1_F) \cdot (s \cdot 1_F) = (ms \bmod p) \cdot 1_F$

(לכן במובן מסויים  $A$  היא "עותק" של  $\mathbb{Z}_p$ ).

## תרגיל 1.6 ב

אם נצמצם את המשוואה הראשונה ב-2 (למה זה מותר?) נקבל

$$\begin{cases} 2x + 4y + 6z = 8 \\ 3x + 6y + 10z = 4 \\ 4x + 8y + 2z = 9 \end{cases}$$

ונקבל את המערכת

$$R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$$

$$R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3$$

נבצע את הפעולות הבאות :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 3x + 6y + 10z = 4 \\ 4x + 8y + 2z = 9 \end{cases}$$

קל לראות שלמערכת אין פתרון מעל  $\mathbb{Z}$ .

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 4 \\ 0x + 0y + z = -8 \\ 0x + 0y + -10z = -7 \end{cases}$$

(אגב, למערכת גם אין פתרון מעל הממשיים).

### תרגיל 1.7

למערכת  $x + y + z = 0$  מעל  $\mathbb{Z}_7$  יש בדיוק 49 פתרונות שונים.

(מדוע?)

### תרגיל 1.8

ג.

$$\begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ ax_1 + (a-1)x_2 - x_3 = a+3 \\ x_1 + (a-1)x_2 + (a-3)x_3 = 7 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} R_2 - aR_1 \rightarrow R_2 \\ R_3 - R_1 \rightarrow R_3 \end{matrix}} \begin{cases} x_1 + (a-1)x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + (1-a)(a-1)x_2 + (a-1)x_3 = -3(a-1) \\ 0x_1 + 0x_2 + (a-2)x_3 = 3 \end{cases}$$

פתרון יחיד:  $a \neq 1, 2$ .

אין פתרון: כש  $a = 2$  נקבל מהמשוואה השלישית סתירה ( $x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 3$ ) ולכן במצב זה אין פתרון.

אינסוף פתרונות:  $a=1$  נקבל מערכת  $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + -x_3 = 3 \end{cases}$  או אם נחליף את השורות

השנייה והשלישית לקבלת צורה מדורגת  $\begin{cases} x_1 + 0x_2 - x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + -x_3 = 3 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases}$  וברור שישנם אינסוף

פתרונות. המשתנה החופשי הוא  $x_2$  כי  $x_1$  ו- $x_3$  משתנים מובילים (בצורה המדורגת הם המשתנים הראשונים בשורות הראשונה והשנייה כך שהמקדמים שלהם אינם אפסים) אם נציב  $x_2 = t$  נקבל שאוסף הפתרונות הוא מהצורה  $\{(1, t, -3) | t \in R\}$ .