

## אלגברה מופשטת 2 – תרגיל בית 7

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

1. הוכיחו או הפריכו:

a.  $2 + 3\sqrt{2}, 4 - \sqrt{2}$  הם חברים ב  $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ .

b. 23 אי-פריק ב  $\mathbb{Z}[\sqrt{-19}]$ .

c. כאשר  $R$  הוא תת-תחום שלמות של  $S$

i. כל איבר א-פריק ב  $R[x]$  אי-פריק ב  $S[x]$ .

ii. כל איבר א-פריק ב  $S[x]$  אי-פריק ב  $R[x]$ .

2. הוכיחו כי אם  $d \equiv 1 \pmod{4}$  אזי  $\mathbb{Z}[\sqrt{d}]$  אינו תחום פריקות יחידה. [רמז: הסתכלו

על  $a = 1 + \sqrt{d}$  והראו ש  $2 \mid a^2$ ]

3. הסבירו מדוע זה ש  $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \sqrt{7})(-1 + \sqrt{7})$  אינו סותר את העובדה כי

$\mathbb{Z}[\sqrt{7}]$  הוא תחום פריקות יחידה.

4. הראו כי המספר 21 ניתן להצגה בשלוש דרכים שונות ב  $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  כמכפלה של שני

איברים. [כלומר קיימים  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$  כך ש  $21 = ab = cd = ef$  וגם

אף אחד מהאיברים לא מחלק את חמשת האחרים]

5. האם  $\mathbb{Z}[\sqrt{10}]$  הוא תחום פריקות יחידה?

6. יהי  $p \in \mathbb{Z}$  ראשוני. הוכיחו כי אם קיימים שלמים  $x, y$  כך ש  $p \mid (x^2 + y^2)$  אך

$p^2 \nmid (x^2 + y^2)$  אז  $p$  לא ראשוני ב  $\mathbb{Z}[i]$ .