פתרון תרגיל 4

.1

א. $f_T(x)=x^3+x$ שורשי הפולינום האופייני הם הערכים העצמיים של המטריצה ולכן הערכים העצמיים הם: $0,i,-i$.

ב. המטריצה ניתנת ללכסון מכיוון שלכל ערך עצמי יש מרחב עצמי עם ריבוי גיאומטרי גדול או שווה לאחד נקבל שסכום המימדים של המרחבים העצמיים שווה למימד המרחב הווקטורי.

ג. מכיוון שהמטריצה ניתנת ללכסון אז היא ניתנת למישלוש.

.2

הייתה טעות בשאלה והכוונה ל $m(x)=x^2$

למשל המטריצה $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$ והפולינום האופייני שלה הוא $f_A(x)=x^2$

.3

נמצא תחילה את הפולינום האופייני

$$\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ 1 & -1 & \lambda-2\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda & 1\\ 0 & \lambda-1 & \lambda-1\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$P_A(x)=(x-1)\left[x(x-1)-(x-1)\right]+1(1-x-1+x)=(x-1)^3$$

נמצא בסיס למרחב העצמי ז"א נמצא את מרחב האפס של המטריצה

$$\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}0 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

הבסיס הוא $(0,1,-1)$.

נשלים לבסיס ונקבל $B=\{(0,1,-1),(1,0,0),(0,1,0)\}$.

$$P=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},P^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ -1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

קיבלנו את המטריצה הדרושה.

.4

א. לא T - אינווריאנטי מכיוון ש $T(1,0)=(0,1)\notin Span\{(1,0)\}$.

ב. לא T - אינווריאנטי מכיוון ש $T(0,1)=(1,0)\notin Span\{(0,1)\}$.

ג. כן T - אינווריאנטי מכיוון שאם $v\in Span\{(1,1)\}$ אז

$T(v)=T(\lambda(1,1))=\lambda T(1,1)=\lambda(1,1)=(\lambda,\lambda)\in Span\{(1,1)\}$.

.5

א. יהי $g=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$ אזי $g(T)=\sum_{i=0}^{n}a_iT^n$ יהי $w\in W$ מכיוון ש W T - אינווריאנטי אז $T(w)\in W$ ואז ניתן להוכיח באינדוקציה שלכל n טבעי $T^n(w)\in W$.

$g(T)(w)=\sum_{i=0}^{n}a_iT^n(w)=\sum_{i=0}^{n}a_iw_i$ כאשר $w_i\in W$ לכל $1\le i\le n$ ובגלל הסגירות במרחב וקטורי נקבל ש $g(T)(w)\in W$ כדרוש.

ב. יהי $f=\sum_{i=0}^{k}b_ix^i$. אני משאיר לכם להוכיח ש $f(T)[W]$ הוא אכן תת מרחב. מסעיף א מספיק להוכיח ש נניח ש $f(T)[W]$ הוא T - אינווריאנטי.

$w\in f(T)[W]$ ז"א קיים $v\in W$ $w=\sum_{i=0}^{k}a_iT^i(v)$.

$T(w)=T\left(\sum_{i=0}^{k}a_iT^i(v)\right)=\sum_{i=0}^{k}a_iT^i(T(v))$ מכיוון ש W הוא תת מרחב T - אינווריאנטי ומכיוון ש $v\in W$ נקבל ש $T(v)\in W$ ז"א $T(w)\in f(T)[W]$ כדרוש.

ג.

תחילה נוכיח שלכל $1\le i,j\le r$ $f(T)[W_i]\cap f(T)[W_j]=\{0\}$ נניח ש $v\in f(T)[W_i]\cap f(T)[W_j]$ מכיוון ש W_i,W_j תת מרחבים T - אינווריאנטים אז $f(T)[W_i]\subseteq W_i,\ f(T)[W_j]\subseteq W_j$ ולכן $v\in W_i\cap W_j$ ומכיוון ש $W_i\cap W_j=\{0\}$ נקבל ש $v=\{0\}$ כדרוש.

נשאר להוכיח ש $f(T)[V]=f(T)[W_1]+f(T)[W_2]+\ldots+f(T)[W_r]$.

יהי $v\in f(T)[W_1]+f(T)[W_2]+\ldots+f(T)[W_r]$ אזי $v=\sum_{i=1}^{r}v_i$ כאשר לכל $1\le i\le r$ מתקיים

$v_i\in f(T)[W_i]$ ז"א לכל $1\le i\le r$ קיים $w_i\in W_i$ כך ש $v_i=\sum_{n=0}^{k}a_nT^n(w_i)$ ז"א

$v=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{n=0}^{k}a_nT^n(w_i)\right)$ מכיוון ש T העתקה ליניארית נקבל ש $v=\left(\sum_{n=0}^{k}a_nT^n\left(\sum_{i=1}^{r}w_i\right)\right)$ נתון ש

$V=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_r$ ולכן $\sum_{i=1}^{r}w_i\in V$ ואז $v=\left(\sum_{n=0}^{k}a_nT^n\left(\sum_{i=1}^{r}w_i\right)\right)\in f(T)[V]$ כדרוש.

אם $v\in f(T)[V]$ אז קיים $u\in V$ כך ש $v=\sum_{n=0}^{k}a_nT^n(u)$ מכיוון ש $V=W_1\oplus W_2\oplus\ldots\oplus W_r$ אז

$u=\sum_{i=1}^{r}w_i$ ז"א $v=\sum_{n=0}^{k}a_nT^n\left(\sum_{i=1}^{r}w_i\right)$ מכיוון ש T העתקה ליניארית

$v=\sum_{i=1}^{r}\left(\sum_{n=0}^{k}a_nT^n(w_i)\right)\in f(T)[W_1]\oplus f(T)[W_2]\oplus\ldots\oplus f(T)[W_r]$.

6.

א.

$$T(1)=1+0\cdot x+0\cdot x^2$$
$$T(x)=x+(x+1)\cdot 1=1+2\cdot x+0\cdot x^2$$
$$T(x^2)=x^2+(x+1)\cdot 2x-x^2\cdot 2=0+2\cdot x-1\cdot x^2$$

המטריצה $[T]=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&2\\0&0&-1\end{pmatrix}$

ב. מכיוון שהמטריצה משולשית הערכים העצמיים הם איברי האלכסון ז"א $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda_1 = 1$.

נמצא את מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

$v_1 = (1,0,0)$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda_2 = 2$.

נמצא את מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$v_2 = (1,1,0)$.

נמצא את הבסיס למרחב העצמי עבור הערך העצמי $\lambda_3 = -1$.

נמצא את מרחב האפס של המטריצה $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$v_3 = (1,-2,3)$.

ג. במקרה זה הפולינום המינימאלי שווה לפולינום האופייני $m(x) = (x-2)(x-1)(x+1)$