הגדרה: נק' $a \in X$ נקראת **מבודדת** (isolated) במרחב (X,d) אם –

$$\exists \epsilon > 0 : B(a,\epsilon) = \{a\}$$

דוגמאות: א. אין נקודה מבודדת ב $\mathbb{R}$ או ב $\mathbb{Q}$ ...

ב. נקודה 3 מבודדת בתת מרחב $[0,1]\cup\{3\}$ של $\mathbb{R}$

ג. ב $\mathbb{Z}$ כל נקודה מבודדת.

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרה **דיסקרטי** אם כל נקודה היא מבודדת.

למשל $\mathbb{Z}$ או $\mathbb{N}$ מרחב דיסקרטי ...

כל מרחב X עם מטריקת 0-1 הוא דיסקרטי

הערה: סדרה קבועה לבסוף תמיד מתכנסת (ברור מה הגבול !) בכל מרחב (X,d).

טענה: a נקודה מבודדת במרחב מטרי (X,d) אם ורק אם

$\lim x_n = a$ גורר שהסדרה x_n היא בהכרח קבועה לבסוף $x_1,\cdots,x_m,a,a,\cdots$.

הוכחה: אם a מבודדת אז קיים $\varepsilon > 0$ כך ש $B(a,\varepsilon)=\{a\}$.

(כיוון ראשון) נניח ש $\lim x_n = a$.

עבור ε הנ"ל קיים $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ כך ש $x_n \in B(a,\varepsilon)=\{a\}$. אז הסדרה היא לבסוף a.

(כיוון שני) נניח כעת ש a לא מבודדת.

נוכיח: שקיימת סדרה עם איברים שונים שמתכנסת ל a.

ברור $B(a,1)\neq\{a\}$. נבחר $x_1 \in B(a,1), x_1 \neq a$. נבחר $0<\varepsilon_2<\min\{d(a,x_1),1\}$.

נעיר ש $0<d(a,x_1)$ כי (X,d) מרחב מטרי ומתקיימת m_1.

שוב בגלל ש a לא מבודדת קיים $x_2 \in B(a,\varepsilon_2), x_2 \neq a$.

אז $x_2 \neq x_1$ (כי $x_1 \notin B(a,\varepsilon_2)$). לכן $x_2 \notin \{a,x_1\}$.

נמשיך בצורה רקורסיבית את הבנייה. אם כבר הגדרנו $x_1,\cdots,x_n$ אז נבחר

$$0<\varepsilon_{n+1}<\min\{d(a,x_1),d(a,x_2),\cdots,d(a,x_n),\tfrac{1}{n}\}$$

קיים $x_{n+1} \in B(a,\varepsilon_{n+1}), x_{n+1} \neq a$. לכן גם $x_{n+1} \notin \{a, x_1, \cdots, x_n\}$.

כך נקבל סדרה (עם איברים שונים) ש $\lim x_n = a$ (כי $0 \leftarrow d(a,x_n) < \frac{1}{n}$).

☺

דוגמה: על שלמים $\mathbb{Z}$ נגדיר מטריקה p-אדית לכל מספר ראשוני $p \in \mathbb{P}$ נתון.

$$d_p(x,y) := \begin{cases} \dfrac{1}{p^{k(x,y)}}\ , k(x,y) := \max\{i\ :\ p^i|(x-y)\}, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

למשל:

$x = 24,\ y = 6\ , p = 3$.

$$d_3(24,6) = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

$$24 - 6 = 18 = 3^2 \cdot 2$$

דוגמה של סדרה מתכנסת שהיא לא קבועה לבסוף עם איברים שונים:

$$x_n := 3^n \in \mathbb{Z}$$

ואכן – $x_n \xrightarrow{d_3} 0$

כי – $d_3(3^n,0) = \frac{1}{3^n} \to 0$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת נקודה מבודדת ב $(\mathbb{Z}, d_p)$

(שימו לב: במרחב $\mathbb{Z}$ עם מטריקה רגילה כל נקודה היא מבודדת).

דוגמה:

ב - $C[0,1]$ קיימת סדרה f_n כך ש –

$$\begin{cases} f_n \xrightarrow{d_1} \theta - \text{פונקציית האפס} \\ f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta - \text{פונקציית האפס} \end{cases}$$

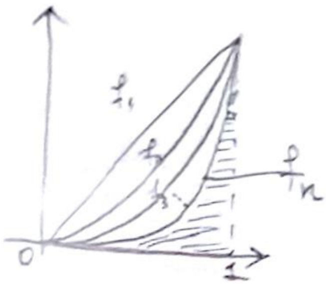
כאשר (תזכורת) –

$$d_1(f_1,f_2) \coloneqq \int_0^1 |f_1(x)-f_2(x)|dx \quad \text{"השטח"}$$

$$d_{max}(f_1,f_2) \coloneqq \max_{0\le x\le 1}|f_1(x)-f_2(x)|$$

נגדיר סדרה של פונקציות (סדרה ב - $C[0,1]$)

$$f_n(x) = x^n \, , x \in [0,1]$$



$$\theta = 0(x) = 0$$

$$d_1(f_n,\theta) = \int_0^1 |f_n(x)-0|dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ז"א –

$$\lim_{n\to\infty} d_1(f_n,\theta) = 0$$

$$f_n \overset{d_1}{\to} \theta$$

כעת –

$$d_{max}(f_n,\theta) = \max_{0\le x\le 1}|f_n(x)-0(x)| = \max_{0\le x\le 1} x^n = 1 \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow d_{max}(f_n,\theta) \nrightarrow 0$$

$$\Rightarrow f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} \theta$$

תרגיל: באופן דומה לכל $[a,b]$, $a<b$.

הגדרות:

א) נניח d,ρ מטריקות על <u>אותה קבוצה</u> X. אומרים ש – d **דומיננטי ביחס ל –** ρ אם:

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

לכל סדרה $x_n \in X$.

ב) אומרים ש - $\boldsymbol{d \sim \rho}$ **("שקולות")** אם יש אותה התכנסות. ז"א

$$\boxed{x_n \overset{d}{\to} a \Leftrightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a}$$

<u>תכונות פשוטות:</u>

1) ($d \sim c \cdot d$, $c > 0$ קבוע.

2) $\rho \le cd \Leftarrow d$ דומיננטי ביחס ל $-\rho$ (הסבר: דרך תכונת הסנדוויץ').

<u>דוגמה:</u>

d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1 בקבוצה $C[a,b]$.

<u>הסבר:</u> מ"ל $-$ $d_1 \le c \cdot d_{max}$.

מ"ל $-$ $\|\cdot\|_1 \le c \cdot \|\cdot\|_{max}$.

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|dx \le \underbrace{(b-a)}_{c>0 \text{ קבוע}} \cdot \underbrace{\max_{a \le x \le b} |f(x)|}_{=\|f\|_{max}}$$

<u>דוגמה:</u>

$X \coloneqq \mathbb{R}^n$. $\boxed{d_{max} \sim d \sim d_1}$

<u>הסבר:</u> $\boxed{d_{max} \le d \le d_1 \le n \cdot d_{max}}$

<u>מסקנה:</u> שלושת המטריקות הנ"ל שונות אבל יש אותה התכנסות.

<u>בהמשך נוכיח</u> – הטופולוגיות שווה!

הגדרה: (טופולוגיה של מרחב פסאודו-מטרי (X,d))

נגדיר טופולוגיה של (X,d) כאוסף של כל תת-קבוצות פתוחות ב X. נסמן:

$$\boldsymbol{top(d)} = top(X,d) \coloneqq \{\text{קבוצות פתוחות ב } - (X,d)\}$$

כאשר **"קבוצה פתוחה"** מוגדרת כך:

אומרים ש - $O \subseteq X$ היא פתוחה אם מתקיים:

$$\boxed{x \in O \Rightarrow \exists \varepsilon_x > 0 : B_{\varepsilon_x}(x) \subseteq O}$$

<u>שימו לב:</u> תת קבוצה $A \subseteq X$ **לא פתוחה** ב (X,d) אמ"ם <u>קיימת</u> נקודה $a \in A$ כך ש $B(a,\varepsilon)$ לא מוכל ב A לכל $\varepsilon > 0$.

מכאן ברור למשל $\emptyset \in top(d)$.

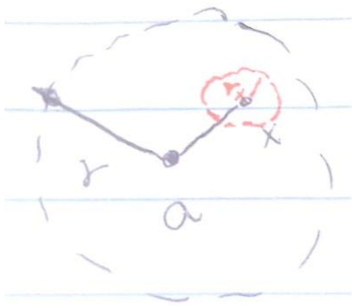
<u>מסקנה:</u>

$$top(d) \ni O = \bigcup_{x \in O} B_{\epsilon_x}(x)$$

<u>משפט:</u> $\forall r > 0, \forall a \in X, \forall (X,d) : B_r(a) \in top(d)$

(ז"א "כדור פתוח" קבוצה פתוחה).

<u>הסבר:</u>



<u>הרעיון:</u> $d(a,x) + r_x < r$.

מכאן ניקח כל מס' r_x כך:

$$0 < r_x < \underbrace{r - d(a,x)}_{\substack{\text{חיובי} \\ \text{כי } x \in B_r(a)}}$$

נוכיח $B_{r_x}(x) \subseteq B_r(a)$.

נניח $y \in B_{r_x}(x)$, צ"ל - $y \in B_r(a)$.

$$d(a,y) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,y) < d(a,x) + r_x < r$$

$$\Rightarrow d(a,y) < r$$

ז"א $y \in B_r(a)$.

זה קורה עבור כל $x \in B_r(a)$ (ועבור r_x מתאים) ולכן $B_r(a)$ קבוצה פתוחה.

☺

הרצאה 2

<u>תוצאה:</u> {כדורים פתוחים} בסיס לטופולוגיה $(top(d))$

התנאים הבאים שקולים:

1) $\emptyset \neq O \in top(d)$.

2) $O =$ איחוד של "כדורים פתוחים".

<u>תרגיל:</u> הוכיחו שלכל מרחב $(X, top(d))$ מתקיים:

t_1) $\emptyset, X \in top(d)$

t_2) $O_1, O_2 \in top(d) \Rightarrow O_1 \cap O_2 \in top(d)$ (חיתוך סופי של קבוצות פתוחות גם)

t_3) $\forall i \in I \quad O_i \in top(d) \Rightarrow \bigcup_{i\in I} O_i \in top(d)$ (איחוד של קבוצות פתוחות גם)

<u>הערה:</u> $\{t_1, t_2, t_3\}$ "אקסיומות של טופולוגיה" על קבוצה X בצורה אבסטרקטית.

הערה: אחד מהמתמטיקאים שהשפיעו על טופולוגיה בצורה מאוד חזקה היה *Felix Hausdorff*. על החיים ומותו הטרגי בתקופת הנאצים בגרמניה ממליץ לקרוא

https://en.wikipedia.org/wiki/Felix_Hausdorff

<u>משפט (תכונת Hausdorff):</u> נניח (X, d) **מרחב מטרי**. אז לכל 2 נקודות <u>שונות</u> יש סביבות זרות.

<u>הוכחה:</u>

$$a \neq b \overset{m_1}{\Rightarrow} d(a,b) > 0$$

ניקח $0 < \epsilon \leq \frac{d(a,b)}{2}$.

אז $B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$.

אם נניח <u>שלא</u>:

$$\exists\ x \in B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b)$$

$$\begin{cases} d(a,x) < \epsilon \\ d(b,x) \overset{m_2}{=} d(x,b) < \epsilon \end{cases}$$

נחבר את 2 המשוואות:

$$d(a,b) \underbrace{\leq}_{m_3} d(a,x) + d(x,b) < 2\epsilon$$

$$\Rightarrow d(a,b) < 2\epsilon$$

סתירה לבחירה.

☺

<u>משפט (יחידות הגבול):</u> במרחב **מטרי** גבול סדרה הוא יחיד (אם קיים).

<u>הוכחה:</u>

אם נניח בשלילה –

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = b$$

כאשר $a \neq b$.

לפי משפט 2 (תכונת Hausdorff) יש סביבות זרות –

$$B_\epsilon(a) \cap B_\epsilon(b) = \emptyset$$

מצד שני, כמעט כל האיברים x_n נמצאים ב - $B_\epsilon(a)$ וגם ב - $B_\epsilon(b)$.

מכאן סתירה ⇐ מש"ל. ☺

דוגמה נגדית (במרחב פסאודו-מטרי אין יחידות הגבול)

במרחב פסאודו-מטרי $X = (\mathbb{R}^2, \rho_1)$ עם

$$\rho_1(x,y) \coloneqq |x_1 - y_1|$$

ניקח את הסדרה

$$x_n = \left(1 + \frac{2}{n}, 7\right) \to \forall y \in \mathbb{R}: (1, y)$$

אין יחידות של הגבול! (צריך לשים לב שזאת לא מטריקה).

תרגיל: הוכיחו שמרחב פסאו-דומטרי עם יחידות הגבול הוא תמיד מרחב מטרי.

הערה:

ב - (X,d) מ"פ, $a\in X$, x_n סדרה. התנאים הבאים שקולים:

1) $\lim_{n\to\infty} d(x_n,a)=0$ $\quad$ $(d(x_n,a)\overset{\mathbb{R}}{\to}0)$.

2) $\forall\epsilon>0\ \exists N\in\mathbb{N}\,, n>N: d(x_n,a)<\epsilon$.

3) בכל ϵ-סביבה של a (ז"א בכל $B(a,\varepsilon)$) נמצאים כמעט כל האיברים של הסדרה.

4) בכל קבוצה פתוחה O שמכילה את a, כמעט כל האיברים נמצאים ב $-O$.

הגדרה: ת"ק A במרחב (X,d) נקראת **סגורה** אם המשלים קבוצה פתוחה.

ז"א אם $\quad A^c := X/A\in top(d)$

למשל:

$B_r[a]$ ("כדור סגור") הוא סגור.

לבדוק לבד! (יש הוכחה פשוטה גם דרך רציפות פונקציות !)

תרגיל: איחוד סופי של קבוצות סגורות סגור. חיתוך של קבוצות סגורות סגור.

רמז: ניתן להוכיח את זה ע"י התכונות של קבוצות פתוחות וחוקי דה-מורגן.

תרגיל: הוכיחו שכל נקודון סגור במרחב מטרי (ושזה לא נכון במרחב פסאודו-מטרי).

הסיקו שכל תת קבוצה סופית במרחב מטרי היא סגורה.

סדרות קושי ושלמות

הגדרה: (X,d) מ"מ. סדרה $x_n\in X, n\in\mathbb{N}$ נקראת **סדרת קושי** $(Cauchy)$ אם לכל $\epsilon>0$ קיים $n_\epsilon\in\mathbb{N}$ כך ש:

$$d(x_i,x_j)<\epsilon$$

$$i,j\geq n_\epsilon$$

הערה:

אם x_n מתכנסת ב $-X$ $(\exists \lim_{n\to\infty}x_n=a\in X)$ אז x_n סדרת קושי (לבדוק!).

הגדרה: מ"מ (X,d) נקרא **שלם** $(Complete)$ אם לכל סדרת קושי x_n ב $X -$ יש גבול ב-X.

הגדרה: מ"נ $(E,\|\cdot\|)$ נקרא **מרחב בנך** $(Banach\ space)$ אם $(E,d_{\|\cdot\|})$ שלם.

דוגמאות:

א) $(\mathbb{R}^n,d)$, $(\mathbb{R}^n,d_1)$, $(\mathbb{R}^n,d_{max}) \in Banach$.

ב) $(C[a,b],d_{max}) \in Banach$.

ג) $(C[a,b],d_1) \notin Banach$ (פרטים בתרגול).

ד) $(C[a,b],d_2) \notin Banach$,

$$\langle f,g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)dx$$

מכפלה פנימית ב - $C[a,b]$ שממנה מקבלים נורמה:

$$\|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}$$

הנורמה מגדירה מטריקה d_2 על מרחב הפונקציות $C([a,b])$.

ה) נגדיר –

$$l_\infty := \left\{x=(x_1,x_2,\dots)\middle|\|x\|_\infty = \sup_{i\in\mathbb{N}}|x_i| < \infty\right\}$$

מרחב של סדרות חסומות.

כעת $(l_\infty,\|\cdot\|) \in Banach$.

הכללה: מרחב פונקציות חסומות על קבוצה S

$$l_\infty(S) := \{f: S \to \mathbb{R} | \mathbb{R} - \text{חסום ב } f(S)\}$$

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in S}|f(x)|$$

2 מקרים פרטיים:

1) $S=\mathbb{N}$, אז נקבל את $l_\infty(\mathbb{N}) = l_\infty$.

2) $S=\{1,2,\dots,n\}$, אז נקבל את $(\mathbb{R}^n,d_{max})$.

ו) $(l_2, \|\cdot\|) \ni Banach$.

כאן $l_2 =$ "מרחב הילברט סדרתי":

הכללה הכי טבעית של מרחב אוקלידי (אבל בעל מימד אינסוף).

$$l_2 \coloneqq \{(x_1, x_2, \dots) \big| x_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < \infty\}$$

מרחב ווקטורי עם חיבור וכפל בסקלר רגיל.

יש <u>מכפלה פנימית</u> – $\langle x, y\rangle \coloneqq \sum_{i=1}^{\infty} x_i y_i$

$$\|x\| \coloneqq \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} x_i^2}$$

<u>דוגמאות נוספות לשיכונים איזומטריים</u>

1) $l_2 \hookleftarrow \mathbb{R}^n$ לפי:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_n, 0, \dots)$$

זהו שיכון איזומטרי לינארי (לבדוק!).

2) $l_2 \hookleftarrow (\mathbb{N}, d_\Delta)$ לפי: $n \longmapsto \frac{e_n}{\sqrt{2}}$

<u>הערה:</u>

2 תכונות מאוד חשובות של שלמות:

1) שלמות נשמרת בקבוצות סגורות (אם מרחב הוא שלם, אז גם תת קבוצה סגורה שלו שלמה לגבי מטקיקת הצמצום).

2) נניח (Y, d_Y) תת מרחב מטרי של (X, d). אז אם (Y, d_Y) שלם אז Y <u>סגורה</u> ב – X.

<u>רמז</u>: <u>תת קבוצה</u> היא סגורה $\Leftrightarrow$ היא "סגורה בנוגע להתכנסות".

<u>דוגמה:</u>

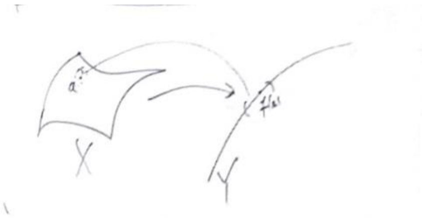
$X = (\mathbb{Z}, d_p)$ מ"מ לא שלם!

לדוגמה עבור $p = 3$: $x_n = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1}$

סדרת קושי שלא מתכנסת ב – X (פרטים בתרגול).

פונקציות רציפות

<u>הגדרה (רציפות):</u> נניח (X,d), (Y,ρ) מרחבים. פונקציה $f: X \to Y$ נקראת **רציפה בנקודה** $\boldsymbol{a \in X}$ אם:



$$\boxed{\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0: d(a,x) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(a), f(x)\big) < \epsilon}$$

נסמן:

$$f \in C(X,Y)$$

$$continuous\ functions$$

אם $Y = \mathbb{R}$ אז $f \in C(X)$.

f נקראת **רציפה**, כאשר f רציפה בכל נקודה $a \in X$.

<u>הגדרה:</u> אומרים ש – f **רציפה במידה שווה (במ"ש)** *uniformly continuous*

אם בבחירה של δ אין תלות ב – a. ז"א –

$$\forall \epsilon > 0\ \exists \delta: d(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \epsilon$$

$$\boxed{f \in UC(X,Y)}$$

<u>הגדרה:</u> אומרים ש – f מקיימת **תנאי ליפשיץ** $(Lipschitz)$ לגבי המקדם c אם $0 < c$:

$$\boxed{\forall x_1, x_2 \in X: \rho\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le c \cdot d(x_1, x_2)}$$

נסמן –

$$\boxed{f \in Lip_c(X,Y)}$$

כאשר –

$$\boxed{Lip(X,Y) = \bigcup_{c>0} Lip_c(X,Y)}$$

תמיד:

$$\boxed{Lip(X,Y) \subset UC(X,Y) \subset C(X,Y)}$$

דוגמאות פשוטות מאנליזה:

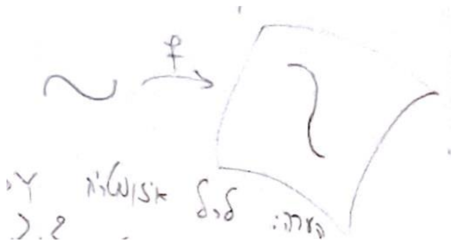
$$f(x) = x^2 \, , f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

רציפה אבל לא במ"ש.

$$f(x) = \sqrt{x} \, , f : [0,1] \to \mathbb{R}$$

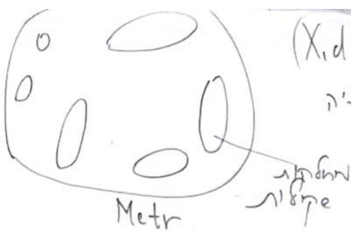
רציפה במ"ש אבל לא ליפשיץ.

הערה: כל שיכון איזומטרי פונקצית ליפשיץ עם מקדם 1 (אבל לא ההפך ! תנו דוגמה).



הערה: אם קיימת איזומטריה, נסמנה –

$$(X,d) \simeq (Y,d)$$



זהו "יחס שקילות" באוסף Metr (מרחבים מטריים).

1) $(X,d) \simeq (X,d)$ (פ' הזהות).

2) $(X,d) \simeq (Y,\rho) \Leftarrow (Y,\rho) \simeq (X,d)$ (פ' הופכית).

(3

$$\begin{cases} (X_1,d_1) \simeq (X_2,d_2) \\ (X_2,d_2) \simeq (X_3,d_3) \end{cases} \Rightarrow (X_1,d_1) \simeq (X_3,d_3) \quad (\text{ההרכבה})$$

תרגיל: הוכיחו שלא קיימת איזומטריה

$$(\mathbb{Z}, d_5) \not\simeq (\mathbb{Z}, d_3)$$

דוגמאות:

1) $Lip_1(X,\mathbb{R}) \ni f_A: X \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י:

$$f_A(x) = d(x,A)$$

הסבר: שימוש באי שוויון

$$|d(x,A) - d(y,A)| \le d(x,y)$$

$$\forall x,y \in X\ ,\emptyset \neq A \subset \underbrace{(X,d)}_{\text{מרחב פ"מ}}$$

2) $Lip_1(E,\mathbb{R}) \ni f: E \xrightarrow{\|\cdot\|} [0,\infty)$, כאשר E מרחב נורמי.

$$x \mapsto \|x\|$$

הסבר:

$$|\|u\| - \|v\|| \underbrace{\le}_{c=1} \|u-v\|$$

3) **הזזה** במ"נ (מרחב נורמי) היא תמיד איזומטריה.

$$T_v: E \to E$$

$$T_v(x) = v + x$$

$v \in E$ וקטור נתון.

הסבר:

$$\|T_v(z) - T_v(y)\| = \|(v+x) - (v+y)\| = \|x-y\|$$

משפט (עיקרון *Heine*): נניח $(X,d),(Y,\rho)$ מרחבים נתונים. אז עבור הפונקציה $f: X \to Y$ התנאים הבאים שקולים:

1) f רציפה.

2) f שומרת על התכנסות (כלומר, $x_n \xrightarrow{d} a \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{\rho} f(a)$).

3) המקור של קבוצה פתוחה גם פתוח. ז"א,

$$\forall O \in top(\rho): f^{-1}(O) \in top(d)$$

נוכיח בהרצאה הבאה ! קודם נדון כמה תוצאות.

<u>משפט (השוואת טופולוגיות):</u> נניח ש - d,ρ מטריקות על אותה קבוצה X. אז התנאים הבאים שקולים:

1) $top(\rho) \subseteq top(d)$.

2) d דומיננטי ביחס ל – ρ. ז"א –

$$x_n \overset{d}{\to} a \Rightarrow x_n \overset{\rho}{\to} a$$

<u>הוכחה:</u>

נגדיר את "פונקצית הזהות" –

$$(X,d) \overset{id}{\to} (X,\rho)$$

$$x \mapsto x$$

נשתמש במשפט הקודם (עיקרון היינה).

כש - $f = id$, אז $f^{-1}(O) = O$. לכן תנאי 3 מעיקרון היינה יהיה –

$$\forall O \in top(\rho): O \in top(d)$$

$$\Rightarrow top(\rho) \subseteq top(d)$$

תנאי 2 בעיקרון היינה נותן לנו ישירות את התנאי השני במשפט שלנו.

■

<u>תוצאה:</u> התנאים הבאים שקולים:

1) $top(d) = top(\rho)$.

2) $\rho \sim d$.

<u>הסבר:</u>

נובע מיד! 2 כיוונים במשפט הקודם.

<u>דוגמה:</u>

1) עבור $X = \mathbb{R}^n$:

$$top(d_{max}) = top(d) = top(d_1)$$

כי:

$$d_{max} \sim d \sim d_1$$

2) עבור $X = C[a,b]$ $(a < b)$:

$$top(d_1) \subsetneq top(d_{max})$$

(מוכל) כי d_{max} דומיננטי ביחס ל - d_1:

$$d_1 \leq (b-a)d_{max}$$

לכן לפי משפט ההשוואה נקבל שיש הכלה של הטופולוגיות.

(לא שווה) כעת, יש **הכלה ממש** כי קיימת סדרה f_n ב - $C[a,b]$ $(a < b)$ וגם סדרה f ב - $C[a,b]$ כך ש –

$$f_n \overset{d_1}{\to} f \text{ , } f_n \overset{d_{max}}{\nrightarrow} f$$

ראינו דוגמה בהרצאה ב - $[0,1]$.