תרגיל 6

להגשה בכ' כסליו (4.12) או כ"ב כסליו (6.12) - כל אחד בקבוצת התרגול שלו.

1. יהא $V = \mathbb{R}^{2\times2}$ מעל $\mathbb{R}$.
   (א) מצא לאילו ערכי a הקבוצה $S = \{\begin{pmatrix} 2 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2a-5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & a \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\} \subset V$ בת"ל?
   (ב) איך התשובה לסעיף (א) היתה משתנת אם היינו חושבים על $S \subset V^{'} = \mathbb{C}^{2\times2}$ כמטריצות מרוכבות?

2. יהי $V = \mathbb{R}_3[x]$ מעל $\mathbb{R}$.
   $S = \{p_1 = 1 + x + x^2 + x^3, p_2 = -1 + x^2, p_3 = 1 - x + x^2 - x^3\}$
   (א) האם $1 \in span(S)$?
   (ב) מצא $span(S)$ (אלו תנאים $p = a + bx + cx^2 + dx^3 \in span(S)$ צריך לקיים)
   (ג) האם Sבת"ל ?
   (ד) השלם את S לבסיס ל- V כלומר מצא $S \subset S^{'}$כך ש $S^{'}$ בסיס ל V.

3. יהיה $V = \{A \in \mathbb{R}^{2\times2} \mid A^t = A\}$מרחב המטריצות הסימטריות הממשיות .
   (א) מצא בסיס ל V. מהו המימד של V.
   (ב) תהא $S = \{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\} \subset V$. מצא את $span(S)$.

4. תהא $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ מטריצה משולשים עליונה כך שאברי האלכסון שלה שונים מ-0.
   (א) הוכח כי שורות Uבת"ל.
   (ב) הסק כי שורות Uמהווים בסיס ל $\mathbb{C}^n$.

5. תזכורת: V יקרא נוצר סופית אם $dim_{\mathbb{F}}V < \infty$
   (א) יהיה V מרחב וקטורי נוצר סופית מעל $\mathbb{F}$. Wתת מרחב. הוכח כי $dim_{\mathbb{F}}W \leq dim_{\mathbb{F}}V$
   (ב) הפרך: ניתן לייצר בסיס לתת מרחב מוקטורים של בסיס של המרחב. כלומר שבהנתן $W \subset V$תת מרחב B_V בסיס ל V ייתכן כי לא קיימת $B_W \subset B_V$ כך ש B_W בסיס ל W

6. תרגיל: יהיה V מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$. $S = \{v_1, \dots v_n\}$. נניח v_n תלוי לינארית בוקטורים האחרים.
הוכח ש $span(S) = spab(S^{'})$ כאשר $S^{'} = \{v_1, \dots v_{n-1}\}$

בהצלחה!