ב"ש בדידה תשעח מועד ב

1. פונקציה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ תקרא ממשיכה אם

$$\forall x_1\in\mathbb{R}\exists x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1<x_2)\wedge(f(x_1)\leq f(x_2))$$

פתרון: פונקציה היא ממשיכה אם לכל x_1 קיים x_2 שגדול ממנו עבורו מתקיים $f(x_1)\leq f(x_2)$. השלילה הלוגית היא

$$\exists x_1\in\mathbb{R}\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq x_2)\vee(f(x_1)>f(x_2))$$

כלומר שקיים x_1 כך שלכל x_2 שגדול ממנו מתקיים $f(x_1)>f(x_2)$

(א) האם $f(x)=e^{-x}$ ממשיכה?
פתרון: לא .למשל עבור $x_1=0$ נראה ש

$$\forall x_2\in\mathbb{R}\,:\,(x_1\geq x_2)\vee(f(x_1)>f(x_2))$$

(המשך שלילת הפסוק שמגדיר פונקציה ממשיכה). יהא x_2. אם $x_2\geq x_1$ סיימנו. אחרת $x_1<x_2$ ומכיוון ש e^{-x} פונקציה יורדת ממש נקבל שאכן $f(x_1)>f(x_2)$.

(ב) האם הפונקציה הקבועה $f(x)=1$ ממשיכה?
פתרון: כן. יהא x_1 ממשי. צריך להוכיח שקיים x_2 שגדול ממנו כך ש $f(x_1)\leq f(x_2)$. נגדיר $x_2=x_1+1$ ואז אכן $x_1<x_2$ ומתקיים

$$f(x_1)=1\leq1=f(x_2)$$

(ג) תהי f ממשיכה. האם בהכרח $f\cdot f$ ממשיכה?
פתרון: לא, למשל

$$f(x)=\begin{cases}-\frac{1}{x} & x\neq0\\ -1 & x=0\end{cases}$$

טענה: f ממשיכה. הוכחה: יהא x_1 אם $x_1<0$ נבחר $x_2=\frac{x_1}{2}$ ונקבל ש $x_1<x_2$ (כי הם שליליים) ו $f(x_1)=-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{|x_1|}\leq\frac{1}{|x_2|}=-\frac{1}{x_2}=f(x_2)$. אם $x_1>0$ אזי נבחר $x_2=x_1+1$ ונקבל ש $x_1<x_2$ ו לכן $\frac{1}{x_2}<\frac{1}{x_1}$ ולכן

$$f(x_1)=-\frac{1}{x_1}\leq-\frac{1}{x_2}=f(x_2)$$

ואם $x_1=0$ נבחר $x_2=1$ ונקבל ש $x_1<x_2$ ו $f(x_1)=-1\leq-\frac{1}{1}=f(1)$. לעומת זאת,

$$(f\cdot f)\,(x)=f(x)\cdot f(x)=\begin{cases}(-\frac{1}{x})^2=\frac{1}{x^2} & x\neq0\\ (-1)^2=1 & x=0\end{cases}$$

והיא לא ממשיכה. הוכחה: נבחר $x_1 = 1$ אזי $f(1) = 1$ ולכן לכל $x_2 > 1$ שגדול ממנו מתקיים $\frac{1}{x_2} < 1$ ולכן $f(1) \cdot f(1) = 1 > \frac{1}{(x_2)^2} = f(x_2) \cdot f(x_2)$.

(ד) תהי f ממשיכה. האם בהכרח $f \circ f$ ממשיכה?

פתרון: לא, למשל

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{1}{x} & x < 0 \\ -1 & x = 0 \end{cases}$$

טענה: f ממשיכה. הוכחה: יהא x_1 אם $x_1 < 0$ נבחר $x_2 = -x_1 > 0$ ונקבל ש $x_2 > x_1$ ו $f(x_1) = \frac{1}{-x_1} = \frac{1}{x_2} = f(x_2)$. אם $x_1 > 0$ אזי נבחר $x_2 = x_1 + 1$ ונקבל ש $x_2 > x_1$ ו $f(x_1) = -\frac{1}{x_1} \leq -\frac{1}{x_2} = f(x_2)$ ואם $x_1 = 0$ נבחר $x_2 = 1$ ונקבל ש $x_2 > x_1$ ו $f(x_1) = -1 \leq -\frac{1}{1} = f(1)$. לעומת זאת,

$$f\left(f(x)\right) = \begin{cases} f(-\frac{1}{x}) = -x^2 & x > 0 \\ -x^2 & x < 0 \\ f(-1) = -1 & x = 0 \end{cases}$$

והיא לא ממשיכה. הוכחה: נבחר $x_1 = 1$ אזי $f(1) = -1$ ולכן לכל $x_2 > 1$ שגדול ממנו מתקיים $1^2 < (x_2)^2$ ולכן $f(1) = -1 > -(x_2)^2 = f(x_2)$.

2. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל שלוש קבוצות A, B, C אם $A \backslash C \subseteq B$ אזי $C \backslash (A \cap B) = C$.

פתרון: הפרכה:

$$A = B = C = \{1\}$$

ואז

$$A \backslash C = A \backslash A = \emptyset \subseteq B$$

ומצד שני

$$C \backslash (A \cap B) = \{1\} \backslash \{1\} = \emptyset \neq C$$

(ב) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $A \backslash (B \backslash A) = A$.

פתרון: הוכחה: בהכלה דו כיוונית: ברור ש $A \backslash (B \backslash A) \subseteq A$. נוכיח $A \backslash (B \backslash A) \supseteq A$. יהא $x \in A$ ונראה $x \in A \backslash (B \backslash A)$. אם $x \in B$ נקבל ש $x \notin B \backslash A$ ולכן $x \in A \backslash (B \backslash A)$. אחרת, $x \notin B$ ואז בפרט $x \notin B \backslash A$ ולכן $x \in A \backslash (B \backslash A)$. קיבלנו שבכל מקרה $x \in A \backslash (B \backslash A)$ כמו שרצינו.

(ג) לכל שתי קבוצות A, B מתקיים $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = A \backslash B$.

פתרון: הפרכה: $A = \emptyset, B = \{1\}$ ואז $A \backslash B = \emptyset$. מצד שני

$$(A \cup B) \backslash (A \cap B) = B \backslash \emptyset = B$$

ולכן שני נצדדים לא שווים.

3. הוכיחו באינדוקציה (רגילה או מלאה) כי לכל n מתקיים $n! \geq 2^{n-1}$.

פתרון: הוכחה:

- בסיס $n = 1$: אכן, $n! = 1 \geq 2^0 = 2^{n-1}$.

- צעד: נניח נכונות עבור n, כלומר, $n! \ge 2^{n-1}$. נוכיח נכונות עבור $n+1$, כלומר, $(n+1)! \ge 2^n$. מתקיים

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1) \underbrace{\ge}_{\text{הנחת האינדוקציה}} 2^{n-1} \cdot (n+1) \underbrace{\ge}_{n\ge 1} 2^{n-1} \cdot (1+1) = 2^{n-1} \cdot 2 = 2^n$$

כמו שרצינו.

4. תהיינה $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

(א) אם $f \circ f = g \circ g$ הפיכה אזי: f הפיכה אם ורק אם g הפיכה.

פתרון: הוכחה:

$(\Rightarrow)$בהנחה ש g הפיכה נרצה להראות ש f הפיכה. מההנחה נקבל ש $g \circ g$ הפיכה כהרכבה של הפיכות. כיוון ש $f \circ f = g \circ g$ נקבל ש $f \circ f$ הפיכה ולכן בפרט היא חח"ע ועל ולכן f ("הימנית) חח"ע ו f ("השמאלית") על. קיבלנו ש f חח"ע + על ולכן f הפיכה.

$(\Leftarrow)$ אותה הוכחה כמו הכיוון הקודם, אם נחליף את האותיות f ב g.

(ב) אם $f = g \circ f$ וגם g הפיכה אזי f הפיכה.

פתרון: הפרכה: נבחר $g = Id$ (הפיכה) ו f לא הפיכה (למשל, פונקציה קבועה $f(n) = 1$) נקבל ש $f = g \circ f$ וגם g הפיכה אבל f אינה הפיכה.

(ג) אם f חח"ע ו g על אזי $g \circ f$ הפיכה.

פתרון: הפרכה: נגדיר $f(n) = n+2$ ו

$$g(n) = \begin{cases} n-1 & n \ge 2 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

אזי f חח"ע ו g על אבל

$$(g \circ f)(n) = g(f(n)) = g(n+2) = n+1$$

ולכן לא הפיכה (ל 1 אין מקור ולכן לא על).

5. בכמה דרכים יכול אב לחלק 10 שקלים ל 4 ילדיו כך ש:

(א) כל ילד יקבל לפחות שקל.

פתרון: נקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

כאשר כל $1 \le x_i$ (כאשר x_i זה מספר השקלים שקיבל ילד i). נגדיר $y_i = x_i - 1$ ונקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה

$$10 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = (y_1+1) + (y_2+1) + (y_3+1) + (y_4+1)$$

כאשר y_i כבר בלי הגבלה (פרט לזה שהם אי-שליליים). נסדר את השיוון ל

$$y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 6$$

והתשובה לשאלה זו היא $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3}$.

(ב) לפחות ילד אחד לא יקבל כלום.

פתרון: נקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

כאשר אחד מ x_i שווה ל 0 (כאשר x_i זה מספר השקלים שקיבל ילד i). נגדיר A_i להיות קבוצת כל הפתרונות בהם $x_i = 0$. ונרצה לחשב $\left|\cup_{i=1}^{4} A_i\right|$. הגודל של A_1 הוא מספר הפתרונות שלמים אי שליליים למשוואה

$$x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

שזה $\binom{12}{2} = \binom{10+3-1}{3-1}$. באופן דומה A_2, A_3, A_4 באותו גודל $\binom{12}{2}$. בנוסף, באופן דומה חיתוך של כל שניים שונים בגודל

$$|A_i \cap A_j| = \binom{10+2-1}{2-1} = \binom{11}{1} = 11$$

והחיתוך של כל 3 שונים הוא

$$|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{10+1-1}{1-1} = \binom{10}{0} = 1$$

והחיתוך של כל $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$ לא אפשרי (מישהו צריך לקבל את השקלים). כעת לפי הכלה הדחה נקבל שהתשובה היא

$$\begin{aligned}\left|\cup_{i=1}^{4} A_i\right| &= \sum_{i=1}^{4} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le 4} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} |A_i \cap A_j \cap A_k| - |A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| \\ &= 4 \cdot \binom{12}{2} - \binom{4}{2} \cdot 11 + \binom{4}{3} \cdot 1 - 0s\end{aligned}$$

(ג) האב לא חייב לחלק את כל 10השקלים לילדים.

פתרון: נקבל את השאלה: כמה פתרונות שלמים אי שליליים יש למשוואה

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = k$$

עבור $0 \le k \le 10$. מספר האפשרויות הוא $\binom{k+3}{3} = \binom{k+4-1}{4-1}$ ולכן התשובה הסופית היא

$$\sum_{k=0}^{10} \binom{k+3}{3}$$