ב"ש אנליזה 2 תשפ מועד א

1. חשבו את:

(א) $\int \frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$.

פתרון: נבצע חילוק פולינומים בין המונה שמדרגה 3 למכנה שהוא

$$(x+1)\left(x^2+x+1\right)=x^3+2x^2+2x+1$$

שמדרגה 3 גם כן:

$$\begin{array}{r|l} & \quad\quad\quad\quad\quad 1 \\ \cline{2-2} x^3+2x^2+2x+1 & \quad x^3+2x^2+2x \\ & -x^3-2x^2-2x-1 \\ \cline{2-2} & \quad\quad\quad\quad -1 \end{array}$$

וקיבלנו ש

$$x^3+2x^2+2x=1\cdot\left(x^3+2x^2+2x+1\right)-1$$

ולכן

$$\int\frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=\int\frac{\left(x^3+2x^2+2x+1\right)-1}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=$$

$$\int 1\mathrm{d}x-\int\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x=x-\int\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}\mathrm{d}x$$

נמשיך עם האינטגרל השני. נשים לב ש x^2+x+1 פולינום אי פריק (הוא מדרגה 2 ואין לו שורשים). לכן הפירוק לשברים חלקיים הוא

$$\frac{1}{(x+1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{(x+1)}+\frac{Bx+C}{(x^2+x+1)}$$

עבור איזה שהן קבועים A,B,C. נמצא אותם: נעשה מכנה משותף ונשווה מונים לקבל

$$1=A\left(x^2+x+1\right)+(Bx+C)(x+1)$$

וכעת נוכל להציב $x=-1$ לקבל

$$1=A$$

ולכן $A=1$. נציב $x=0$ לקבל

$$1=1\cdot 1+C$$

ולכן $C=0$. לסיום נשווה את המקדם של x^2 בשני האגפים - באגף שמאל זה 0 ובאגף ימין זה $A+B$ לכן

$$0=A+B$$

וקיבלנו ש

$$B=0-A=0-1=-1$$

לכן:

$$\int\frac{1}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{(x+1)}\mathrm{d}x+\int\frac{x}{\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1-1}{\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\int\frac{2x+1}{\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=$$

$$=\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=$$

$$\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{2}\int\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}\mathrm{d}x=$$

$$\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)+C$$

כאשר האינטגרל האחרון מחושב לפי ה"זכרו". לסיכום התרגיל:

$$\int\frac{x^3+2x^2+2x}{(x+1)\left(x^2+x+1\right)}\mathrm{d}x=x-\left(\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln\left|x^2+x+1\right|-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\arctan\left(\frac{x+\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{3}{4}}}\right)\right)+C$$

(ב) $\int x(x+1)e^x\mathrm{d}x$.

פתרון: נשים לב ש

$$\int x(x+1)e^x\mathrm{d}x=\int x^2e^x\mathrm{d}x+\int xe^x\mathrm{d}x$$

ונחשב את הימני ואחכ נעבור לשמאלי. נשתמש באינטגרציה בחלקים:

נתחיל

$$\begin{aligned}\int xe^x\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ccc} f=x & \Rightarrow & f'=1 \\ g'=e^x & & g=e^x \end{array}\right\} = \\ &= xe^x - \int e^x \mathrm{d}t \\ &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

ואחכ

$$\begin{aligned}\int x^2e^x\mathrm{d}x &= \left\{\begin{array}{ccc} f=x^2 & \Rightarrow & f'=2x \\ g'=e^x & & g=e^x \end{array}\right\} = \\ &= x^2e^x - 2\int xe^x \mathrm{d}t \\ &= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C\end{aligned}$$

לכן התשובה הסופית היא:

$$\begin{aligned}\int x\left(x+1\right)e^x\mathrm{d}x &= x^2e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + xe^x - e^x + C \\ &= x^2e^x - \left(xe^x - e^x\right) + C\end{aligned}$$

.2

(א) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x) = \frac{x^3-x^2-2x}{(x+1)^2}$.
פתרון: נשים לב כי

$$x^3-x^2-2x = x\left(x^2-x-2\right) = x\left(x-2\right)\left(x+1\right)$$

ולכן $f(x) = \frac{x(x-2)}{x+1}$ לכל $x \neq -1$. כעת:
<u>אסימפטוטות אנכיות:</u> הפונקציה לא מוגדרת -1, נחשב את הגבול

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^3-x^2-2x}{\left(x+1\right)^2} = \lim_{x\to -1}\frac{x\left(x-2\right)}{x+1} = \left\{\frac{3}{0^{\pm}}\right\} = \pm\infty$$

כאשר הסימן ∞ כאשר הגבול מימין ל -1 הוא ∞ והגבול משמאל ל -1 הוא $-\infty$ ולכן יש אסימפטוטה אנכית ב $x=-1$.
<u>אסימפטוטה משופעת מימין:</u> נחשב את הגבול

$$a = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} = \frac{1\cdot 1}{1} = 1$$

ואז

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x-2\right)}{x+1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(x-2\right)-x\left(x+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{x+1}=-3$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת מימין שהיא $x-3$.

אסימפטוטה משופעת משמאל: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x-2\right)\left(x+1\right)}{\left(x+1\right)^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{2}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}=1$$

ו

$$b=\lim_{x\to-\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(x-2\right)}{x+1}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(x-2\right)-x\left(x+1\right)}{x+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{x+1}=-3$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת משמאל שהיא $x-3$.

(ב) מצאו את כל האסימפטוטות (אנכיות ו/או משופעות) של הפונקציה $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$.

פתרון: נשים לב ש x^2+x+1 פולינום אי פריק (הוא מדרגה 2 ואין לו שורשים) ולכן הוא לא מתאפס באף נקודה. נציב $x=0$ ונקבל 1. מה שאומר ש x^2+x+1 תמיד חיובי ולכן f מוגדרת בכל הממשיים. בנוסף, f רציפה בכל הממשיים.

אסימפטוטות אנכיות: בכל נקודה a מתקיים כי

$$\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

בגלל הרציפות של f. בפרט אין נקודה a עבורה יש גבול חד צדדי מהצורה $\lim_{x\to a^\pm}f(x)=\pm\infty$ ולכן אין אסימפטוטות אנכיות.

אסימפטוטה משופעת מימין: נחשב את הגבול

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x}=1$$

ואז

$$b=\lim_{x\to\infty}f(x)-ax=\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=\frac{1}{2}$$

כאשר מסתמכים על

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1}-x &= \left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}+x}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x} \\
&= \frac{x+1}{x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+x} \\
&= \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}+1\right)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת מימין שהיא $x+\frac{1}{2}$.

<u>אסימפטוטה משופעת משמאל:</u> נחשב את הגבול

$$
\begin{aligned}
a = \lim_{x\to(-\infty)}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\to(-\infty)}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x} \\
&= \lim_{x\to(-\infty)}\frac{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} \\
&\overset{\{x\le 0\}}{=} \lim_{x\to(-\infty)}\frac{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}{x} = -1
\end{aligned}
$$

ואז

$$
b = \lim_{x\to\infty} f(x)-ax = \lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x = \frac{1}{2}
$$

כאשר מסתמכים על

$$
\begin{aligned}
\sqrt{x^2+x+1}+x &= \left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)\frac{\sqrt{x^2+x+1}-x}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \\
&= \frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}-x} \\
&= \frac{x+1}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-x} \\
&\overset{\{x\le 0\}}{=} \frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}-1\right)} \xrightarrow{x\to\infty} \frac{1}{-1-1}=-\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

ולכן יש אסימפטוטה משופעת משמאל שהיא $-x-\frac{1}{2}$.

.3

(א) חשבו את הגבול

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x-x\cos(x)}.$$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t=0$ (כיוון ש $\sin\left(t^2\right)$ רציפה והקטע בו עושים אינטגרל שואף ל 0) נוכל בעזרת המשפט היסודי של החדוא לקבל:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{-x}^{x^2}\sin\left(t^2\right)\mathrm{d}t}{x-x\cos(x)}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^4\right)-(-1)\sin\left(x^2\right)}{1-\cos(x)+x\sin(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{x^2}}{\frac{1-\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}}$$

כעת נחשב את הגבול של המונה והמכנה ונגיע לתשובה הסופית:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2x^3\sin\left(x^4\right)}{x^4}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x^2}=2\cdot 0\cdot 1+1=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=\frac{1}{2}+1=1\frac{1}{2}$$

לכן התשובה הסופית היא

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x\sin\left(x^4\right)+\sin\left(x^2\right)}{x^2}}{\frac{1-\cos(x)+x\sin(x)}{x^2}}=\frac{1}{1\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

(ב) חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{n}$.

פתרון: נראה שזהו סכום רימן:

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\cos\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)}{n}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

ועבור $f(x)=\cos(x)\sin\left(\sin(x)\right)$ שהיא רציפה בקטע $[0,1]$ נקבל ש

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\cos\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\sin\left(\frac{k}{n}\right)\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\cos(x)\sin\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x$$

נחשב את $\int\cos(x)\sin\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x$ בעזרת שיטת ההצבה:

$$\int\cos(x)\sin\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{c}t=\sin(x)\\ \mathrm{d}t=\cos(x)\mathrm{d}x\end{array}\right\}=\int\sin\left(t\right)\mathrm{d}t=$$

$$=-\cos(t)+C=-\cos\left(\sin\left(x\right)\right)+C$$

ולכן

$$a_n \to \int_0^1 \cos(x)\sin\left(\sin(x)\right)\mathrm{d}x = \left[-\cos\left(\sin\left(x\right)\right)\right]\Big|_0^1 = -\cos\left(\sin\left(1\right)\right)+1$$

וזוהי התשובה הסופית.

.4

(א) קרבו את $\sin\left(\frac{1}{2}\right)$ עד כדי שגיאה של $h=\frac{1}{1000}$.

פתרון: טור טיילור של $\sin(x)$ הוא

$$\sin(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

ואם נציב $x=\frac{1}{2}$ נקבל

$$\sin(1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}$$

וזהו טור לייבניץ ולכן מתקיים שלכל k, יש את החסם

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\right| \le \left|\frac{(-1)^k}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}\right| = \frac{1}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}$$

שזהו חסם על השגיאה $\left|\sin(1)-\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}\right|$. כיוון שרוצים שגיאה שקטנה מ $\frac{1}{1000}$ נחפש k עבורו $\frac{1}{(2k+1)!\cdot 2^{2k+1}}\le\frac{1}{1000}$. עבור $k=2$ נקבל $\frac{1}{5!\cdot 2^5}=\frac{1}{3840}<\frac{1}{1000}$. מכאן שהקירוב

$$\sum_{n=0}^{2-1}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}=\frac{1}{1\cdot 2^1}-\frac{1}{3!\cdot 2^3}=\frac{23}{48}\approx 0.479166$$

עם שגיאה קטנה מ $\frac{1}{100}$כמבוקש.

(ב) חשבו את $f^{(46)}(0)$ עבור $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.פתרון: פיתוח טיילור של $\frac{1}{1-x}$ סביב 0 הוא

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$$

לכן טור טיילור של $f(x)=\frac{1}{1+x^2}=\frac{1}{1-(-x^2)}$ (סביב 0) הוא

$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(-x^2\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot x^{2n}$$

לפי התיאוריה, ידוע שהמקדם של x^{46} הוא $\frac{f^{(46)}(0)}{46!}$. בטור שמצאנו המקדם של x^{46} הוא $(-1)^{23}=-1$ (עבור $n=23$)

לכן

$$\frac{f^{(46)}(0)}{46!} = -1$$

ומכאן ש $f^{(46)}(0) = -46!$.

5. תהא f פונקציה רציפה המקיימת לכל $x \in \mathbb{R}$ כי $f(x) = -f(-x)$, וכמו כן $y = mx + b$ אסימפטוטה משופעת מימין של f.

(א) הוכיחו/הפריכו: לפונקציה אין אסימפטוטה אנכית ב $x = 0$.

פתרון: הוכחה: הפונקציה רציפה ובפרט

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

ומכיוון ש $f(0)$ הוא מספר ממשי ואינו $\pm\infty$ נקבל שב $x = 0$ אין אסימפטוטה אנכית.

(ב) הוכיחו/הפריכו: $y = mx - b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f.

פתרון: הוכחה.

הוכחה: לכל $x \neq 0$ ממשי מתקיים כי

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{-f(-x)}{x} = \frac{f(-x)}{-x}$$

ולכן

$$\lim_{x \to (-\infty)} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to (-\infty)} \frac{f(-x)}{-x} = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

כאשר המעבר האחרון נובע מהנתון ש $y = mx + b$ אסימפטוטה משופעת מימין של f. בנוסף, לפי אותו נתון,

$$\lim_{x \to (-\infty)} f(x) - mx = \lim_{x \to (-\infty)} -f(-x) + m(-x) = \lim_{x \to \infty} -f(x) + m(x) = -\left[\lim_{x \to \infty} f(x) - m(x)\right] = -b$$

והוכחנו שאכן $y = mx - b$ אסימפטוטה משופעת משמאל של f .