מתמטיקה מד"ר תשפא מועד ב

1. מצאו פתרון למד"ר $3y' = y$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = 1$.

פתרון: נסדר

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\text{dy}}{y} = \frac{1}{3}\text{dx}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$\ln|y| = \frac{1}{3}x + C$$

לכן $|y| = e^{\frac{1}{3}x} \cdot e^{C}$ ולכן

$$y = \pm e^{\frac{1}{3}x} \cdot e^{C}.$$

נציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = \pm e^{C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם הפלוס ו $C = 0$. התשובה הסופית היא

$$y(x) = e^{\frac{1}{3}x} \cdot e^{0} = e^{\frac{1}{3}x}.$$

2. מצאו פתרון למד"ר $\frac{y^2}{(1+x)^2} = \frac{2yy'}{1+x}$ המקיים את תנאי ההתחלה $y(0) = -1$.

פתרון: נחלק ב y^2 ונכפיל ב $(1+x)$

$$\frac{2y'}{y} = \frac{1}{(1+x)}$$

$$\frac{2\mathrm{dy}}{y} = \frac{\mathrm{dx}}{(1+x)}$$

וקיבלנו מד"ר פרידה. נעשה אינטגרל על שני האגפים, כל אחד לפי המשתנה שלו:

$$2\ln|y| = \ln|1+x| + C$$

לכן $|y|^2 = |1+x| \cdot e^C$ ולכן

$$y = \pm\sqrt{|1+x| \cdot e^C}.$$

נציב תנאי התחלה

$$-1 = y(0) = \pm\sqrt{|1| \cdot e^C}$$

לכן צריך לקחת את הפתרון עם המינוס לפני השורש ואז $1 = e^C$. קיבלנו ש $C = 0$ והתשובה הסופית היא

$$y = -\sqrt{|1+x|}.$$

3. מצאו פתרון למד"ר $y'' - 4y' + 4y = (e^x - 1)(e^x + 1)$ המקיים $y(0) = y'(0) = 0$.

פתרון: נתחיל עם המד"ר ההומוגנית

$$y'' - 4y' + 4y = 0$$

שהפולינום האופייני שלה $p(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. לכן 2 שורש של הפולינום האופייני מריבוי 2. לכן $y_1 = e^{2x}, y_2 = xe^{2x}$ פתרונות למד"ר הלינארית ההומגנית לעיל. מכיוון שהיא מסדר 2 הם בסיס למרחב הפתרונות שלה. לכן הפתרון הכללי למד"ר ההומגנית הוא

$$y_h = d_1 y_1 + d_2 y_2 = d_1 e^{2x} + d_2 x e^{2x} = e^{2x}(d_1 + d_2 x)$$

וכעת נמצא פתרון פרטי למד"ר הלא הומגנית עם שיטת הניחוש. נפצל את $(e^x - 1)(e^x + 1) = e^{2x} - 1$ ונחפש שני פתרונות פרטי

למדרים y_{p_1}, y_{p_2}:

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}, \qquad y'' - 4y' + 4y = -1$$

ואז $y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$ יהיה פתרון פרטי למד"ר שלנו.

עבור $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$ ננחש

$$y_{p_1} = \alpha x^2 e^{2x}$$

שהרי 2 הוא שורש מריבוי 2. מתקיים

$$y'_{p_1} = \alpha\left(2x + 2x^2\right)e^{2x}$$
$$y''_{p_1} = \alpha\left(2\left(2x + 2x^2\right) + 2 + 4x\right)e^{2x} = \alpha\left(1 + 4x + 2x^2\right)2e^{2x}$$

נציב במשוואה

$$y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$$

$$\left(1 + 4x + 2x^2\right)2\alpha e^{2x} - 4\alpha\left(2x + 2x^2\right)e^{2x} + 4\alpha x^2 e^{2x} = e^{2x}$$

נצמצם ב e^{2x}:

$$2\alpha\left(1 + 4x + 2x^2\right) - 4\alpha\left(2x + 2x^2\right) + 4\alpha x^2 = 1$$

$$2\alpha = 1$$

לכן $\alpha = \frac{1}{2}$ ו $y_{p_1} = \frac{1}{2}x^2 e^{2x}$.

עבור $y'' - 4y' + 4y = -1$ ננחש $y_{p_2} = \alpha$ קבוע ואז מהמשוואה נקבל כי

$$4\alpha = -1$$

ולכן $\alpha = -\frac{1}{4}$ ו $y_{p_2} = -\frac{1}{4}$.

קיבלנו ש

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4}$$

יהיה פתרון פרטי למד"ר שלנו. לכן הפתרון הכללי למד"ר הלא הומגנית שלנו הוא

$$y = y_h + y_p = e^{2x}\left(d_1 + d_2 x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4}$$

ונציב תנאי התחלה למציאת הקבועים.

$$0 = y(0) = d_1 - \frac{1}{4}$$

לכן $d_1 = \frac{1}{4}$. בנוסף

$$y' = e^{2x}\left[2\left(d_1 + d_2 x\right) + d_2\right] + \left[x + x^2\right] e^{2x}$$

ונציב תנאי התחלה

$$0 = y'(0) = 2d_1 + d_2$$

ולכן $d_2 = -2d_1 = -\frac{1}{2}$. סה"כ הפתרון הוא

$$y = e^{2x}\left(d_1 + d_2 x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4} =$$

$$e^{2x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{4} == e^{2x}\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2\right) - \frac{1}{4}$$

4. מצאו פתרון למד"ר $y = xy' - (x-1)\,y''$ המקיים $y(0) = 1$ וכן $y'(0) = 1$.

פתרון: נסמן פתרון y כטור טיילור

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

ואז

$$y' = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^{k-1}, \qquad y'' = \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-2}$$

כעת נציב:

$$\left(1-x\right) y'' + xy' - y = y'' - xy'' + xy' - y =$$

$$= \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-2} - \sum_{k=2}^{\infty} a_k k\left(k-1\right) x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right) x^k - \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1}\left(k+1\right) k x^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_k k x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k =$$

$$= a_2 \cdot 2 \cdot 1 - a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right) - a_{k+1}\left(k+1\right) k + a_k k - a_k\right] x^k$$

ולכן $2a_2 - a_0 = 0$ ולכל $k \geq 1$ מתקיים

$$a_{k+2}\left(k+2\right)\left(k+1\right) - a_{k+1}\left(k+1\right) k + a_k k - a_k = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{\left(1-k\right) a_k + k\left(k+1\right) a_{k+1}}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}$$

נוכל לבחור a_0, a_1 כרצוננו ואז:

$$a_2 = \frac{a_0}{2}$$

$$a_3 = \frac{2a_2}{3!} = \frac{a_0}{3!}$$

$$a_4 = \frac{-a_2 + 3!a_3}{3 \cdot 4} = \frac{-\frac{a_0}{2} + 3!\frac{a_0}{3!}}{3 \cdot 4} = \frac{a_0}{4!}$$

ואפשר להוכיח באינדוקציה כי $a_k = \frac{a_0}{k!}$ לכל $k \geq 2$.

כעת נבחר $a_1 = \frac{a_0}{1!}$ ונקבל כי

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} a_0 \frac{1}{k!} x^k = a_0 e^x$$

ונבחר $a_0 = 1$ לקבל כי $y_1(x) = e^x$ פתרון למד"ר שלנו. נייצר פתרון נוסף: נבחר $a_0 = 0$ (מה שגורר כי $a_k = 0$ לכל $k \geq 2$) ו $a_1 = 1$ ונקבל את הפתרון $y_2(x) = x$. נוכיח כי y_1, y_2 בת"ל ע"י שנראה שהורונסקיאן שונה מאפס. אכן

$$\det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} e^x & x \\ e^x & 1 \end{pmatrix} = e^x \left(1-x\right)$$

שונה מאפס בסביבה של 0 (ששמה תנאי ההתחלה). מכאן נסיק שהפתרון הכללי הוא

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$1 = y'(0) = c_1 + c_2$$

לכן $c_1 = 1, c_2 = 0$ והפתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x$.

5. מצאו פתרון למד"ר $xy' - (x-1)\,y'' = y$ המקיים $y(3) = 3$ וכן $y'(0) = 1$.

פתרון: ראינו ממקודם כי $y_1 = e^x, y_2 = x$ פותרים את המד"ר, ללא תנאי התחלה. נציג פתרון כ

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^x + c_2 x$$

ונציב תנאי התחלה

$$1 = y(0) = c_1$$

$$3 = y'(3) = c_1 e^3 + c_2$$

לכן $c_1 = 1$ ו $c_2 = 3 - c_1 e^3 = 3 - e^3$ ופתרון לתרגיל הוא $y(x) = e^x + \left(3 - e^3\right) x$.