(המשך מפעם שעברה)

מחפשים את העקומות האינטגרליות של השדה $v=\begin{pmatrix}-\sin\phi\cos\theta\\-\sin\phi\sin\theta\\\cos\phi\end{pmatrix}$.

עקומה כללית על המפה $\alpha(t)=(\theta(t),\phi(t))$ עוברת לעקומה על הטורוס

$$\gamma(t)=r(\alpha(t))=\begin{pmatrix}(2+\cos\phi(t))\cos\theta(t)\\(2+\cos\phi(t))\sin\theta(t)\\\sin\phi(t)\end{pmatrix}$$

דרשנו $\dot{\gamma}(t)=v(\gamma(t))$:

$$\begin{pmatrix}-\sin\phi(t)\cdot\dot{\phi}(t)\cdot\cos\theta(t)-(2+\cos\phi(t))\cdot\sin\theta(t)\cdot\dot{\theta}(t)\\-\sin\phi(t)\cdot\dot{\phi}(t)\cdot\sin\theta(t)+(2+\cos\phi(t))\cdot\cos\theta(t)\cdot\dot{\theta}(t)\\\cos\phi(t)\cdot\dot{\phi}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sin\phi(t)\cdot\cos\theta(t)\\-\sin\phi(t)\cdot\sin\theta(t)\\\cos\phi(t)\end{pmatrix}$$

- המשוואה השלישית: $\cos\phi\cdot\dot{\phi}=\cos\phi$. אם $\cos\phi\neq0$ אז $\dot{\phi}=1$
- שתי המשוואות הראשונות בכתיב מטריצי:

$$\underbrace{\begin{bmatrix}-\sin\phi\cos\theta & -(2+\cos\phi)\sin\theta\\-\sin\phi\sin\theta & (2+\cos\phi)\cos\theta\end{bmatrix}}_{A}\cdot\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\end{bmatrix}}_{v}=\underbrace{\begin{bmatrix}-\sin\phi\cos\theta\\-\sin\phi\sin\theta\end{bmatrix}}_{b}$$

מתי A^{-1} קיימת? אם $|A|\neq0$.

$$|A|=-\sin\phi\cos^2\theta(2+\cos\phi)-\sin\phi\sin^2\theta(2+\cos\phi)=-\sin\phi(2+\cos\phi)$$

מתי זה $\neq0$? כאשר $\sin\phi\neq0$. ואם המטריצה A הפיכה, כלומר $|A|\neq0$, אפשר לקבל:

$$\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\end{bmatrix}=A^{-1}\cdot b=\frac{1}{-\sin\phi(2+\cos\phi)}\begin{bmatrix}(2+\cos\phi)\cos\theta & (2+\cos\phi)\sin\theta\\\sin\phi\sin\theta & -\sin\phi\cos\theta\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}-\sin\phi\cos\theta\\-\sin\phi\sin\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

וקיבלנו שאם $\sin\phi\neq0$, $\begin{bmatrix}\dot{\phi}\\\dot{\theta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$.

בכל מקרה $\cos\phi\neq0$ או $\sin\phi\neq0$, ולכן תמיד $\dot{\phi}=1$. אם נציב $\dot{\phi}=1$ במד"ר מקבלים שחייב להיות $\dot{\theta}=0$ גם תמיד. סה"כ מקבלים שהקווים הגאודזיים הם: $\begin{cases}\theta(t)=a\\\phi(t)=t+c\end{cases}$

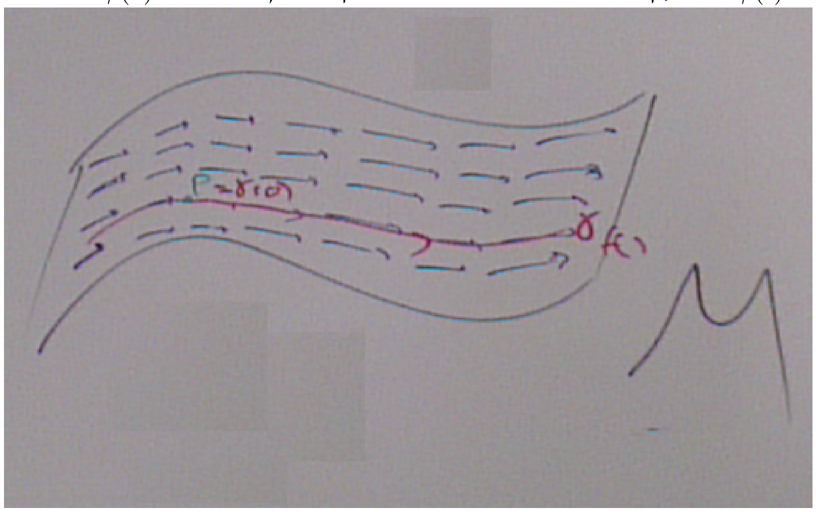
נגזרת לי

הגדרה

נגזרת לי של הפונקציה $f:M\to\mathbb{R}$ לפי השדה הוקטורי v מוגדרת ע"י:

$$(\mathcal{L}_vf)(P):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(\gamma(t))\Big|_{t=0}$$

כאשר $\gamma(t)$ היא עקומה אינטגרלית שמתחילה בנקודה P, ז.א. $\gamma(0)=P$.



כלומר: $(\mathcal{L}_v f)(P)$ = השינוי של f בכיוון v בנקודה P.

תרגיל

יהי M הטורוס, שהוא משטח הסיבוב של המעגל $(x-2)^2+z^2=1$ סביב ציר הz, ותהי $f:M\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f=X$. חשבו את $(\mathcal{L}_v f)(P)$ עבור $P=(3,0,0)\in M$ ולכל שדה משיק v.

פתרון

P היא הנקודה הכי לכיוון $[x]$ בטורוס. בהרצאה ראינו נוסחה נוספת לנגזרת לי: $\mathcal{L}_v f=\langle\nabla f,v\rangle$. אצלנו, $\nabla f=(1,0,0)$.

יהי v שדה משיק כלשהו. אזי בנקודה P, שיעור הx של v הוא אפס, כלומר $v(P)=(0,*,*)$. יוצא $\nabla f(P)\perp v(P)$.

$$\Longrightarrow\ \langle\nabla f(P),v(P)\rangle=0=(\mathcal{L}_v f)(P)$$

דרך נוספת

יהי v שדה וקטורי משיק כלשהו. נמצא עקומה אינטגרלית $\gamma(t)$ המקיימת $\gamma(0)=P$.

אם נסתכל על $f(\gamma(t))$:

$$f(\gamma(0))=3=x(\gamma(t))$$

$$f(P)=x(P)=3$$

לכן יש מקסימום בנקודה $t=0$.

לכל הנקודות על הטואוס יש $x \leq 3$, ובנקודה המיוחדת P יש $x = 3$. לכן $f\left(\gamma\left(0\right)\right)$ הוא המקסימום של כל המספרים $f\left(\gamma\left(t\right)\right)$. כלומר לפונקציה $f\left(\gamma\left(t\right)\right)$ יש מקסימום כאשר $t = 0$. לפי משפט מאינפי,

$$\left(\mathcal{L}_{v}f\right)\left(P\right) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f\left(\gamma\left(t\right)\right)\right|_{t=0} = 0$$

תכונות של נגזרת לי

$$\mathcal{L}_{v+w}f = \mathcal{L}_{v}f + \mathcal{L}_{w}f$$

$$\mathcal{L}_{v}\left(fg\right) = \left(\mathcal{L}_{v}f\right)g + f\left(\mathcal{L}_{v}g\right)$$

תרגיל

מתי השדה $v\left(x,y\right) = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ הוא גרדיאנט של פונקציה כלשהי $f : \mathbb{R}^{2} \to \mathbb{R}$?

פתרון

נרשום במפורש $A = \begin{pmatrix} a^{1}{}_{1} & a^{1}{}_{2} \\ a^{2}{}_{1} & a^{2}{}_{2} \end{pmatrix}$.

$$v = A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{1}{}_{1}x + a^{1}{}_{2}y \\ a^{2}{}_{1}x + a^{2}{}_{2}y \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \nabla f$$

כאשר f מקיימת

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = a^{1}{}_{1}x + a^{1}{}_{2}y \\ \frac{\partial f}{\partial y} = a^{2}{}_{1}x + a^{2}{}_{2}y \end{cases}$$

נדרוש $\frac{\partial^{2} f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^{2} f}{\partial x \partial y}$ (ז.א. $w = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}\,\mathrm{d}y$ סגורה). תנאי הכרחי הוא A סימטרית, וע"פ למת פואנקרה יוצא שזה גם תנאי מספיק.

נמצא את f:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = a^{1}{}_{1}x + a^{1}{}_{2}y \qquad / \int \left(\cdot\right)\,\mathrm{d}x$$

$$f = \frac{a^{1}{}_{1}}{2}x^{2} + a^{1}{}_{2}xy + \varphi\left(y\right) \qquad / \frac{\partial}{\partial y}\left(\cdot\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\cancel{a^1{}_2x}+\varphi'(y)$$

זה צריך להיות שווה ל

$$\cancel{a^2{}_1x}+a^2{}_2y$$

$$\varphi'(y)=a^2{}_2y \qquad /\int$$

$$\boxed{\varphi(y)=\frac{a^2{}_2}{2}y^2+c}$$

$$\boxed{f(x,y)=\frac{a^1{}_1}{2}x^2+\overbrace{a^1{}_2}^{=a^2{}_1}xy+\frac{a^2{}_2}{2}y^2+c}$$

משפט Egregium

תזכורת

אנטי סימטריזציה - $a_{[ij]}=\frac{1}{2}\left(a_{ij}-g_{ji}\right)$.

משפט

עקמומיות גאוס תלויה רק במטריקה (g_{ij}):

$$K=\frac{2}{g_{11}}\left(\Gamma^1_{1[1/2]}+\Gamma^j_{1[1}\Gamma^2_{2]j}\right)=$$

$$=\frac{2}{g_{11}}\left[\left(\frac{1}{2}\left(\Gamma^2_{11/2}-\Gamma^2_{12/1}\right)\right)+\frac{1}{2}\left(\Gamma^j_{11}\Gamma^2_{2j}-\Gamma^j_{12}\Gamma^2_{1j}\right)\right]=$$

$$=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11/2}-\Gamma^2_{11/1}+\Gamma^j_{11}\Gamma^2_{2j}-\Gamma^j_{12}\Gamma^2_{1j}\right)=$$

$$=\frac{1}{g_{11}}\left(\Gamma^2_{11/2}-\Gamma^2_{12/1}+\Gamma^1_{11}\Gamma^2_{21}-\Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11}+\Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22}-\Gamma^2_{12}\Gamma^2_{12}\right)$$

תרגיל

חשבו את עקמומיות גאוס של המישור $z=0$ ע"י משפט Eg.

פתרון

ראינו שבמישור Γ_{ij}^{k} ונגזרותיהם זה אפס ולכן

$$K = \frac{1}{g_{11}} \left(0 - 0 + 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 + \cdots\right) = 0$$