תרגיל

(א) בהנתן $m\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ מיהן הת"ח של $m\mathbb{Z}$?

פתרון דוגמה - $\ldots \le 8\mathbb{Z} \le 4\mathbb{Z} \le 2\mathbb{Z} \le z$
כל מספר $k \in \mathbb{Z}$ כך ש$m|k$ נותן ת"ח $k\mathbb{Z} \le m\mathbb{Z}$ ואלה כל הת"ח של $m\mathbb{Z}$

(ב) בהינתן $m\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ מהן הת"ח של $\mathbb{Z}$ שמכילות את $m\mathbb{Z}$?

דוגמה $6\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$. $2\mathbb{Z}$ ו$3\mathbb{Z}$ מכילים את $6\mathbb{Z}$.

פתרון לכל $k|m$ $m\mathbb{Z} \le k\mathbb{Z} \le \mathbb{Z}$ ואלא הת"ח היחידות של $\mathbb{Z}$ המקיימות את התנאי.

(ג) הוכיחו $m\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{\frac{k}{m}}$

פתרון נשתמש באיזו 1. נבנה הומו' $\underset{mx \mapsto x \bmod \frac{k}{m}}{\varphi : m\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_{\frac{k}{m}}}$. נבדוק ש$\varphi$ הומו':

$$\ker\varphi = \left\{ mx \middle| x \equiv 0 \left(\bmod \frac{k}{m} \right) \right\} = \left\{ mx \middle| \frac{k}{m} | x \right\} = x = \frac{k}{m} \cdot x$$

$$= \left\{ mx : mx = m\frac{k}{m}x' = kx' \right\} = k\mathbb{Z}$$

ואז לפי איזו' 1 $m\mathbb{Z}/k\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_{\frac{k}{m}}$

משפט ההתאמה (איזו' 4)

קיימת התאמה חח"ע בין תת חבורות של G/H לבין תת חבורות של G המכילות את H

תרגיל

הראו בעזרת משפט ההתאמה שכל התת חבורות של $\mathbb{Z}_n$ הן מהצורה $k\mathbb{Z}_n$

פתרון

נסתכל על π: $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$

$$\pi(x) = x \pmod n$$

$$\ker\pi = n\mathbb{Z}$$

לפי איזו' 1: $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_n$
לפי משפט ההתאמה קיימת התאמה חח"ע $\{k\mathbb{Z}n|k|n\} \longleftrightarrow \{k\mathbb{Z}|k|n\}$
משפט איזו 2: נשים לב כי $\pi(k) = \pi(Hk)$ ($Hk \le G$ בגלל ש$H \lhd G$ - ראינו בתרגול הקודם) $\Leftarrow$ $hk \in Hk$ כך ש$h \in H$ וגם $k \in K$

$$\pi(hk) = \pi(h)\pi(k) = H(kH) = kH = \pi(k)$$

ולכן $H \le Hk$ $\pi(k) = \pi(Hk) = Hk/H$

בדרך אחרת

נשכח מG: אם $H\cap K\trianglelefteq K$ אז אפשר לעשות מודולו.

משפט איזו 2: אם $H\trianglelefteq G$ וגם $K\leq G$:

1. $H\cap K\trianglelefteq K$
2. $\nicefrac{K}{H\cap K}\cong\nicefrac{Hk}{H}$

דוגמה

נבדוק את איזו 2 על הדוגמה הבאה:

$$\pi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_{6}$$

$$\nicefrac{\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_{6}\pmod 6$$

$$\pi\left(8\mathbb{Z}\right)=\pi\left(8\mathbb{Z}+6\mathbb{Z}\right)=\pi\left(\gcd\left(6,8\right)z\right)=\pi\left(2\mathbb{Z}\right)=\nicefrac{2\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}\cong2\mathbb{Z}_{6}$$

$$\nicefrac{2\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_{3}=\left\{ 6\mathbb{Z},2+6\mathbb{Z},4+6\mathbb{Z}\right\}$$

$$\nicefrac{8\mathbb{Z}}{6\mathbb{Z}\cap8\mathbb{Z}}=\nicefrac{8\mathbb{Z}}{\mathrm{lcm}(6,8)\mathbb{Z}}=\nicefrac{8\mathbb{Z}}{24\mathbb{Z}}\cong\mathbb{Z}_{3}=\left\{ 24\mathbb{Z},8+24\mathbb{Z},16+24\mathbb{Z}\right\}$$

תרגיל

G חבורה, $M,N\trianglelefteq G$, $H\leq G$ ונניח כי $H\cap M=H\cap N=\left\{ e\right\}$. הראו ש$\nicefrac{HN}{N}\cong\nicefrac{HM}{M}$

פתרון

$$\nicefrac{HM}{M}\cong\nicefrac{H}{H\cap M}=\nicefrac{H}{\left\{ e\right\}}\cong H\cong\nicefrac{HN}{M}$$

משפט איזו 3

יהיו $G\trianglelefteq K\trianglelefteq N$ וגם $N\trianglelefteq G$

1. $\nicefrac{K}{N}\trianglelefteq\nicefrac{G}{N}$
2. $\nicefrac{\left(\nicefrac{G}{N}\right)}{\left(\nicefrac{K}{N}\right)}\cong\nicefrac{G}{K}$

חבורות סימטריה = חבורות תמורות

S_n - תמורות על $\{1, 2, ...n\}$

פירוק למחזורים זרים

1. ב S_4 $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1\end{pmatrix} = \pi$
2. משמיטים מחזורים מאורך 1: $\pi = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 6 & 5\end{pmatrix}$
3. ניתן לסובב מחזורים: $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2 & 3 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 1 & 2\end{pmatrix}$
4. מחזור $(a_1, ...a_k)$- האורך שלו הוא k.
5. כמה דרכים יש לרשום מחזור באורך k? $\boxed{k}$
6. כמה מחזורים מאורך k יש בתוך S_n? $\binom{n}{k}(k-1)!$

משפט

כל תמורה בS_n ניתן לכתוב כפירוק למחזורים זרים. הפירוק יחיד עד כדי סדר המחזורים וסיבובים בכל מחזור.

7. מחזורים זרים מתחלפים $\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4 & 5 & 6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$
מחזורים שאינם זרים לא בהכרח מתחלפים.
8. סדר של מחזור:

$$\pi = (1, ...k)$$

$$\pi(1) = 2, \pi(2) = 3, \pi^2(1) = 3, ...\pi^k(1) = 1$$

הסדר הוא k

9. איך מצואים סדר של תמורה π? נפרק את π למחזורים זרים

$$\pi = \sigma_1 \cdots \sigma_t$$

(σ_i הם מחזורים זרים).

$$o(\pi) = \mathrm{lcm}\left(o(\sigma_1), ...o(\sigma_t)\right)$$

משפט

כל תמורה בS_n ניתן לכתוב כפירוק לחילופים(לאו דווקא זרים!)

דרך

(א) קודם מפרקים למחזורים זרים.

(ב) $(a_1,...a_k) = \begin{pmatrix} a_1 & a_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & a_{k-1} \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \end{pmatrix}$

10. מחזור באורך 2 נקרא חילוף.