

תרגיל בית 9 בשדות ותורת גלואה 88-311 סמסטר א' תש"ף

שאלה 1 (חימום). יהי $m|n$. הוכיחו $x^m - 1 | x^n - 1$.

שאלה 2. יהי $n > 1$ אי זוגי. הוכיחו שהפולינום הציקלוטומי מקיים $\Phi_{2n}(x) = \Phi_n(-x)$.

שאלה 3. כתבו נוסחה קצרה לפולינום הציקלוטומי $\Phi_{2^n}(x)$.

שאלה 4. מצאו את כל הפולינומים הציקלוטומיים $\Phi_n(x)$ כך ש- $\deg \Phi_n(x) = 4$.

שאלה 5 (קצת קשה). יהי $n > 1$ טבעי, ונתבונן בפולינום הציקלוטומי $\Phi_n(x)$.

א. יהי $a \in \mathbb{Z}$ ויהי p ראשוני המחלק את $\Phi_n(a)$. הוכיחו כי $p|n$ או $p \equiv 1 \pmod{n}$.
רמז: הפולינום $x^n - 1$ הוא ספרבילי מודולו p אם $p \nmid n$. מה הוא הסדר של $a \in U_p$?

ב. הסיקו מהסעיף הקודם שישנם אינסוף מספרים ראשוניים כך ש- $p \equiv 1 \pmod{n}$.

שאלה 6 (רשות). יהי n טבעי. בשאלה זו נראה הכללה לשאלות 2 ו-3 שתאפשר לחשב את הפולינום הציקלוטומי $\Phi_n(x)$ קצת יותר מהר.

א. יהי p ראשוני. הוכיחו שאם p זר ל- n , אז $\Phi_n(x^p) = \Phi_n(x)$. אחרת, אם $p|n$, הוכיחו כי $\Phi_{pn}(x) = \Phi_n(x^p)$.

ב. יהי r הרדיקל של n (כלומר מכפלת הראשוניים שמחלקים את n). הוכיחו שהפולינום הציקלוטומי מקיים $\Phi_n(x) = \Phi_r(x^{n/r})$.

שאלה 7 (רשות). כתבו תוכנה שבהינתן n טבעי מחשבת את הפולינום הציקלוטומי Φ_n . הדפיסו את $\Phi_1, \dots, \Phi_{100}$ ושערו השערה לגבי מקדמים של פולינומים ציקלוטומיים. חשבו את Φ_n עבור $n > 100$ ובדקו את השערתכם.

בהצלחה!