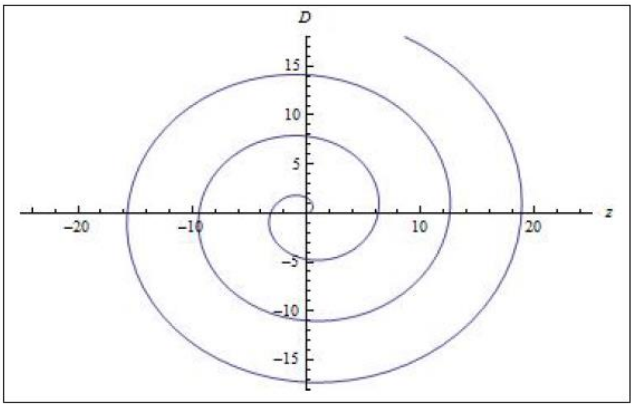
<u>פתרון תרגיל בית 3 פונקציות מרוכבות למתמטיקה – לוגים, חזקות ואינטגרלים מסוג שני, כולל משפט הערכת האינטגרל</u>

<u>שאלה 1</u>

יהי L ענף אנליטי של $\log$ בתחום $\mathbb{C}$ פחות העקום te^{it} כאשר $0 \le t < \infty$.
אם $L(1)=0$ חשבו את $L(-5)$, $L(17)$.
(טכניון)
<u>פתרון</u>

קודם נבין מהי העקומה te^{it}. זה כמו מעגל, אבל עם רדיוס גדל לכן מדובר בספירלה.
לכן לא ניתן לבחור לזווית תחום קבוע $[\alpha, \alpha+2\pi)$ לכל z.



הלוג הרב-ערכי הוא

$$\log(z) = \ln|z| + i(\theta + 2\pi k), k \in \mathbb{Z}$$

ה- k קובע באיזה ענף אנחנו נמצאים.
נתון $L(1)=0$, לכן

$$L(1) = \underbrace{\ln|1|}_{0} + i(0 + 2\pi k) = 0 \Rightarrow k = 0$$

אז הענף הראשון, כלומר הסיבוב הראשון של הספירלה, הזווית θ בין 0 ל- 2π מתאים ל- $k=0$.
נשאר לחשוב באיזה ענף נמצאות הנקודות -5 ו- 17.
נבחר זווית בתחום $-\pi \le \theta < \pi$. בסיבוב הראשון $k=0$, בסיבוב השני $k=1$ וכך הלאה.
עבור $z=-5$

$$L(-5) = \underbrace{\ln|-5|}_{\ln 5} + i\Big(-\pi + 2\pi \underbrace{k}_{k=1}\Big) = \ln 5 + \pi i$$

עבור $z=17$ נקבל $k=2$, לכן

$$L(17) = \underbrace{\ln|17|}_{\ln 17} + i\Big(0 + 2\pi \underbrace{k}_{k=2}\Big) = \ln 17 + 4\pi i$$

שאלה 2

הוכיחו שלפונקצי'ה הרב-ערכית $\log(z)$ אין ענף אנליטי בתחום $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$.

(טכניון)

פתרון

נניח בשלילה כי קי'ים ענף אנליטי של $\log$ בתחום D, נסמנו ב-L.

אזי מתקי'ים

$$L(1)=\ln(1)+iArg(1)=i2\pi k_0$$

עבור k_0 שלם כלשהו, ומכיוון ש-L רציפה אזי לכל $z=e^{i\theta}$ מתקי'ים

$$L\left(e^{i\theta}\right)=iArg\left(e^{i\theta}\right)=i\theta+i2\pi k_0$$

עבור אותו k_0.

אבל אז נקבל

$$\lim_{\theta\to 2\pi} L\left(e^{i\theta}\right)=\lim_{\theta\to 2\pi} i\theta+i2\pi k_0=i2\pi\left(k_0+1\right)$$

$$\lim_{\theta\to 2\pi} L\left(e^{i\theta}\right)=L\left(\lim_{\theta\to 2\pi} e^{i\theta}\right)=L(1)=i2\pi k_0$$

כלומר קיבלנו שלאחר סיבוב של 2π ערך הפונקצי'ה קפץ ב-$i2\pi$. וזאת אם כן, סתירה.

לכן לא קימת L כזו, כלומר אין ענף אנליטי ל-$\log(z)$ בתחום $D=\mathbb{C}\setminus\{0\}$. מש"ל

שאלה 3

(טכניון)

כמה ענפים אנליטים יש לפונקצי'ה $f(z)=\sqrt[3]{\sqrt{z}+1}$ בתחום D שהוא חצי המישור הימני?

פתרון

לפונקצי'ה $\sqrt[6]{z}$ יש 6 ענפים שונים.

הפונקצי'ה f היא הרכבה של הפונקציות $g(z)=\sqrt{z}+1$ ו- $h(z)=\sqrt[3]{z}$, כלומר

$f(z)=(h\circ g)(z)=h\left(g(z)\right)$.

עבור $g(z)$, נשתמש בנוסחה להוצאת שורש ממספר מרוכב ונקבל:

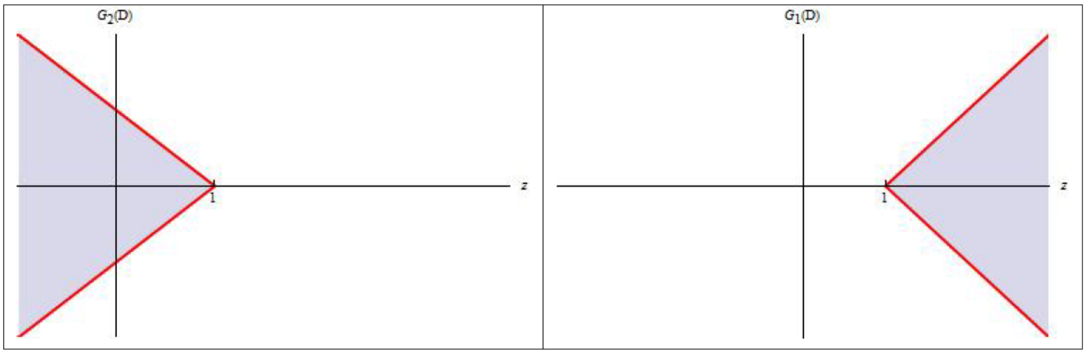
$$g(z)=\sqrt{z}+1=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\theta+2\pi k}{2}}+1,\ \ k=0,1$$

קיבלנו 2 ענפים אנליטים שונים של g נסמן ענפים אלו ב-G_1, G_2:

$$G_1(z)=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\theta}{2}}+1$$

$$G_2(z)=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\frac{\theta+2\pi}{2}}+1=\sqrt{|z|}\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}+\pi\right)}+1$$

נצייר את התמונה של התחום D ע"י שני הענפים של g:



כעת נבדוק כמה ענפים אנליטים יש לפונקצי'ה $h(z)=\sqrt[3]{z}$ בכל אחד מהתחומים שקיבלנו.

בתחום $G_1(D)$, כיוון שאיננו מקיף את הראשית, יש ל-h 3 ענפים שונים:

$$H_1(z)=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\theta}{3}}$$

$$H_2(z)=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\theta+2\pi}{3}}$$

$$H_3(z)=\sqrt[3]{|z|}\cdot e^{i\frac{\theta+4\pi}{3}}$$

בתחום $G_2(D)$, אין ל-h אף ענף אנליטי מכיוון שהתחום מקיף את הראשית, ואז לפונקצי'ת ה-$\log$ אין אף ענף אנליטי.

לסיכום לפונקצי'ה f יש 3 ענפים אנליטים שונים בתחום D.

<u>שאלה 4</u>

יהי Log הענף העיקרי (הראשי) של הלוגריתם בתחום $\mathbb{C}\setminus\{-t|t\geq 0\}$.

א. הראו כי לכל z בתחום ההגדרה של Log מתקיי'ים

$$Log\frac{1}{z}=-Log\, z$$

ב. הראו שכלל זה לא בהכרח נכון עבור ענפים אחרים של הלוגריתם.

<u>פתרון</u>

א. עבור הענף הראשי של הלוגריתם

$$Log\, z=\ln|z|+iArg(z)$$

כאשר

$$Arg(z)\in(-\pi,\pi)$$

אם נסמן

$$z=R\cdot e^{i\theta}$$

אז נקבל

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{R}e^{-i\theta}$$

ולכן

$$Log\frac{1}{z}=\ln\left|\frac{1}{z}\right|+iArg\left(\frac{1}{z}\right)=-\ln|z|-i\theta=-Log\, z$$

השתמשנו בחוקי לוגים ממשים ובשוויון $\frac{1}{z}=\frac{1}{R}e^{-i\theta}$ עבור הזווית.

ב. אם נבחר ענף שבו הזווית היא בין $(0,2\pi)$ וניקח $z=i$, נקבל

$$\log\frac{1}{z}\underset{z=i}{=}\log\underbrace{\frac{1}{i}}_{-i}=\log(-i)=\underbrace{\ln|-i|}_{=\ln 1=0}+i\underbrace{\arg(-i)}_{=\frac{3\pi}{2}\in(0,2\pi)}=\frac{3\pi}{2}i$$

$$-\log z\underset{z=i}{=}-\log i=-\underbrace{\ln|i|}_{=\ln 1=0}-i\underbrace{\arg(i)}_{=\frac{\pi}{2}\in(0,2\pi)}=-\frac{\pi}{2}i$$

לכן השוויון לא מתקיים.

<u>שאלה 5</u>

מצאו את כל הערכים האפשרי'ים של הביטוי'ים הבאים:

א. $(1+i)^{2i}$

ב. $(-i)^{-i}$

ג. $\mathrm{Im}\left((1-i)^{1+i}\right)$

ד. מצאו את כל הערכים האפשריים עבור $1^{a+ib}, a,b\in\mathbb{R}$.

<u>פתרון</u>

א. לפי הגדרת החזקה:

$$z^w=e^{w\log(z)}$$

$$z=1+i$$

$$w=2i$$

לכן

$$(1+i)^{2i}=e^{2i\log(1+i)}\underset{\log z=\ln|z|+i(\theta+2\pi k)}{=}e^{2i\left(\ln\sqrt{2}+i\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}=e^{i\ln 2}e^{-\left(\frac{\pi}{2}+4\pi k\right)}$$

ב. $$(-i)^{-i}=e^{(-i)\left(\ln|-i|+i\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi k\right)\right)}=e^{-\frac{\pi}{2}+2\pi k}$$

ג.

$$\operatorname{Im}\left((1-i)^{1+i}\right)=\operatorname{Im}\left(e^{(1+i)\left(\ln\sqrt{2}+i\left(-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\right)}\right)=\operatorname{Im}\left(e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k+i\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)}\right)$$

$$=e^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2\pi k}\cdot\sin\left(\ln\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)$$

ד.

שוב גם כאן נשתמש בנוסחת החזקה המרוכבת:

$$z^w=e^{w\log(z)}$$

כאן $z=1$ ו-$w=a+ib$ לכן נקבל:

$$1^{a+ib}=e^{(a+ib)\log(1)}=e^{(a+ib)(\ln|1|+iarg(1))}=e^{(a+ib)(i2\pi k)}=e^{-2b\pi k}\cdot e^{2ai\pi k}$$

$$k\in\mathbb{Z}$$

<u>שאלה 6</u>

הראו שחוק החזקות $e^{zw}=\left(e^z\right)^w$ נכשל (כאשר החזקה מוגדרת עם הענף הראשי של הלוגריתם) ע"י בחירת z,w מתאימים.

<u>פתרון</u>

ניקח $w=i$, $z=2\pi i$ ונקבל:

$$\left(e^z\right)^w=\Big(\underbrace{e^{2\pi i}}_{=1}\Big)^i=1^i=e^{iLog1}=1\neq e^{-2\pi i\cdot i}=e^{-2\pi}=e^{zw}$$

<u>שאלה 7</u>

פתרו את המשוואה $e^{e^z}=1$

<u>פתרון</u>

ראינו בתרגול כי $e^{2\pi ki}=1$ לכל $k\in\mathbb{Z}$ ולכן

$$e^{z}=2\pi ki\ ,\ k\in\mathbb{Z}$$

אם $k=0$ זה לא יתכן ולכן אין פתרון.

עבור $k>0$ נקבל

$$2\pi ki=e^{\ln(2\pi k)}\cdot e^{i\frac{\pi}{2}}$$

נשווה חזקות ונקבל:

$$z=\ln 2\pi k+i\frac{\pi}{2}+2\pi ni\ ,\ n\in\mathbb{Z}$$

ועבור $k<0$ נקבל בדומה

$$z=\ln\left(2\pi|k|\right)-i\frac{\pi}{2}+2\pi ni\ ,\ n\in\mathbb{Z}$$

נאחד את הפתרונות ונקבל תשובה סופית

$$z=\ln\left(2\pi|k|\right)+i\frac{\pi}{2}+i\pi n\ ,\ k,n\in\mathbb{Z}\ ,\ k\neq 0$$

<u>שאלה 8</u>

הוכיחו כי $\left|\int_{\gamma}\frac{2-z}{2+\bar{z}}dz\right|\leq 3\pi+6$ כאשר γ היא המסילה המורכבת מחצי מעגל היחידה העליון ומהקטע הישר מהנקודה -1 לנקודה 1.

<u>פתרון</u>

נשתמש במשפט הערכת האינטגרל.

תחילה נמצא את המקסימום של $|f(z)|$ עבור $f(z)=\frac{2-z}{2+\bar{z}}$ על γ.

על חצי מעגל היחידה העליון, כאשר נתון $|z|=1$: עבור הערכת המונה נשתמש באי-שוויון המשולש (הגרסה הרגילה) ונקבל:

$$|2-z|\leq 2+|z|=3$$

עבור הערכת המכנה נשתמש באי-שוויון המשולש ההפוך ונקבל:

$$|2+\bar{z}|\geq\big|2-|\bar{z}|\big|=\Big|2-\underbrace{|z|}_{=1}\Big|=1$$

בסה"כ על חצי מעגל היחידה העליון מתקיים: $|f(z)|\leq\frac{3}{1}=3$.

על הקטע הישר מהנקודה -1 לנקודה 1 על הציר הממשי מתקיים: $|z|=|x|\leq 1$ כאשר $x=Re(z)$,

לכן האינטגרנד בערך מוחלט על המסילה הוא:

$$\left|\frac{2-z}{2+\bar{z}}\right| \le \frac{2+|z|}{|2-|\bar{z}||} \le \frac{3}{1} = 3$$

כלומר $M \le 3$.

המסלול מורכב מחצי מעגל היחידה העליון, שאורכו: $\frac{2\pi r}{2} = \pi r \underbrace{=}_{r=1} \pi$

ובנוסף הקטע הישר מהנקודה -1 לנקודה 1 על הציר הממשי, שאורכו 2.

בסה"כ אורך המסלול γ הוא $L = \pi + 2$.

לפי משפט ההערכה נקבל: $\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \le 3 \cdot (\pi + 2) = 3\pi + 6$. מש"ל.

שאלה 9

הוכיחו את אי השוויון $\int_\gamma \left|e^z - e^{\bar{z}}\right| dz \le 4e$ כאשר γ היא מסילה שמורכבת מהקטע הישר מ-i עד 0 ואחר כך מהקטע הישר מ-0 עד 1.

פתרון

נשתמש במשפט הערכת האינטגרל.

תחילה נמצא את המקסימום של $|f(z)|$ עבור $f(z) = e^z - e^{\bar{z}}$ על γ.

לכל $w \in \mathbb{C}$ מתקיים $w - \bar{w} = 2i\,\mathrm{Im}(w)$ ולכן

$$|f(z)| = \left|e^z - e^{\bar{z}}\right| = \left|2i\,\mathrm{Im}(e^z)\right| = 2\left|\mathrm{Im}(e^z)\right|$$

לפי הגדרת האקספוננט המרוכב $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, לכן $\mathrm{Im}(e^z) = e^x \sin y$.

מכאן מקבלים

$$|f(z)| = 2\left|\mathrm{Im}(e^z)\right| = 2\left|\underbrace{e^x}_{>0}\sin y\right| = 2e^x \underbrace{|\sin y|}_{\le 1} \le 2e^x$$

נשים לב ש-$\sin y$ כאן ממשי לכן $|\sin y| \le 1$.

במסילה שלנו בקטע הראשון $x = 0$ ובקטע השני $x \le 1$, לכן בסה"כ על γ: $x \le 1$.

מכיוון שהאקספוננט הממשי הוא פונק' עולה נקבל

$$|f(z)| \le 2e^x \le 2e^1 = 2e = M$$

על γ.

אורך המסילה הוא סכום אורכי הקטעים המרכיבים אותה. הקטע הראשון הוא על ציר ה-y מהנקודה $i=(0,1)$ ל-$0=(0,0)$ שאורכו $|i-0|=1$ והקטע השני הוא על ציר ה-x מהנקודה $0=(0,0)$ ל-$1=(1,0)$ שאורכו $|1-0|=1$ ובסה"כ $L=2$.

בסה"כ תשובה סופית

$$\int_\gamma \left|e^z - e^{\bar{z}}\right| dz \le ML = 4e$$

<u>שאלה 10</u>

חשבו את האינטגרל הבא:

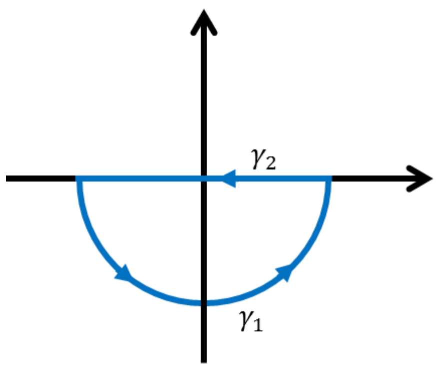
$$\int_\gamma (\sin(z) + \bar{z})dz$$

כאשר γ היא המסילה המוגדרת על-ידי:

$$\begin{cases} e^{it} & -\pi \le t \le 0 \\ 1-2t & 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

<u>פתרון</u>

נצייר את המסילה שלנו על המישור המרוכב:



נפרק את האינטגרל ל-2:

$$\int_\gamma (\sin(z) + \bar{z})dz = \underbrace{\int_\gamma \sin(z)\, dz}_{I} + \underbrace{\int_\gamma \bar{z}\, dz}_{II}$$

הפונקציה $\sin(z)$ אנליטית ולכן נוכל להשתמש במשפט ניוטון לייבניץ, אבל המסלול סגור ולכן נקבל כאן 0!

$$\int_\gamma \sin(z)\,dz = 0$$

הפונקציה $\overline{z}$ אינה גזירה באף נקודה לכן נעשה עבורה פרמטריזציה.

עבור II:

$$\int_\gamma \overline{z}\,dz = \int_{\gamma_1} \overline{z}\,dz + \int_{\gamma_2} \overline{z}\,dz$$

עבור γ_1:

$$z(t) = e^{it} \quad -\pi \le t \le 0$$
$$\overline{z}(t) = e^{-it}$$
$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = ie^{it} \Rightarrow dz = ie^{it}dt$$

נציב בנוסחה:

$$\int_{\gamma_1} \overline{z}\,dz = \int_{-\pi}^{0} e^{-it} \cdot i \cdot e^{it}\,dt = i\int_{-\pi}^{0} dt = i \cdot t|_{-\pi}^{0} = i\pi$$

עבור γ_2:

$$z(t) = 1 - 2t \quad 0 \le t \le 1$$
$$\overline{z}(t) = 1 - 2t$$
$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = -2 \Rightarrow dz = -2dt$$

נציב בנוסחה:

$$\int_{\gamma_2} \overline{z}\,dz = \int_0^1 (1-2t)(-2)dt = -2\int_0^1 (1-2t)dt = -2[t - t^2]_0^1 = 0$$

ולכן:

$$\boxed{\int_\gamma (\sin(z) + \overline{z})dz = i\pi}$$

<u>שאלה 11</u>

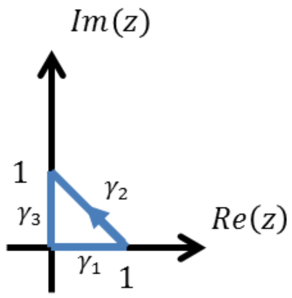
חשבו את האינטגרל הבא:

$$\int_\gamma (z + \overline{z})(z - \overline{z})dz$$

כאשר γ משולש בעל קודקודים ב- $0,1$ ו-i, המתואר נגד כיוון השעון.

פתרון

נתאר את γ:



נחשב כל γ בנפרד, נשתמש בפרמטריזציה של קו ישר
$z(t) = z_1 + t(z_2 - z_1), \quad 0 \le t \le 1$.

עבור γ_1:

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 1$$

נקבל:

$$z(t) = 0 + t(1-0) = t$$
$$\overline{z(t)} = t$$
$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = 1 \Rightarrow dz = dt$$

מכיוון שהחלק המדומה שווה 0, אז $\bar{z}(t) = t$, נציב בפונקציה:

$$f\big(z(t)\big) = (t+t)(t-t)$$

נשתמש בנוסחה עבור אינטגרל מסוג 2 ונקבל:

$$\int_0^1 f(z)dz = \int_0^1 f\big(z(t)\big) \cdot \underbrace{z'(t)}_{=1}\, dt \Rightarrow \int_0^1 (t+t)(t-t)dt = 0$$

עבור γ_2:

$$z_1 = 1 \quad z_2 = i$$

ולכן:

$$z(t) = 1 + t(i-1) = 1 + ti - t$$
$$z(t) = (1-t) + i(t)$$
$$\bar{z}(t) = (1-t) - i(t)$$
$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = i - 1 \Rightarrow dz = (i-1)\, dt$$

נשתמש בנוסחה עבור אינטגרל מסוג שני:

$$\int_0^1 \big((1-t)+it+(1-t)-it\big)\big((1-t)+it-(1-t)+it\big)(i-1)dt =$$

$$= (i-1)\int_0^1 (2-2t)(2it)dt = 4i(i-1)\int_0^1 (t-t^2)dt =$$

$$= 4(-1-i)\left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = -4(1+i)\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right] = \boxed{-\frac{2}{3}(1+i)}$$

עבור γ_3:

$$z_1 = i, \quad z_2 = 0$$

נקבל:

$$z(t) = i + t(0-i) = i - it$$
$$z(t) = i(1-t)$$
$$\overline{z}(t) = -i(1-t)$$
$$z'(t) = \frac{dz}{dt} = -i \Rightarrow dz = -i\,dt$$

נשתמש בנוסחה עבור אינטגרל מסוג שני:

$$\int_0^1 \underbrace{\big(i(1-t)-i(1-t)\big)}_{=0}\big(i(1-t)+i(1-t)\big)(-i)dt = 0$$

ולכן התשובה הסופית היא:

$$\boxed{\int_\gamma (z+\overline{z})(z-\overline{z})dz = \int_{\gamma_2}(z+\overline{z})(z-\overline{z})dz = -\frac{2}{3}(1+i)}$$