פתרונות למבחן בתורת החבורות

1. (א)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 10 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

(ב) הסדר הוא ה lcm של אורכי המחזורים כלומר

$$\mathrm{lcm}(4,3,2) = 12$$

(ג) לפי נוסחא

$$\mathrm{o}(\sigma^{14}) = \frac{\mathrm{o}(\sigma)}{\gcd(\mathrm{o}(\sigma),14)} = \frac{12}{\gcd(12,14)} = \frac{12}{2} = 6$$

(ד) לפי הטבלא ברור ש

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 10 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 10 & 5 & 9 & 1 & 8 & 4 & 7 & 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 10\ \ 6\ \ 4)(2\ \ 5\ \ 8)(3\ \ 9)$$

$$\sigma^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 4 & 8 & 9 & 6 & 2 & 10 & 7 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{2} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 6 & 5 & 3 & 10 & 8 & 1 & 7 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$
$$= (1\ \ 6)(4\ \ 10)(2\ \ 5\ \ 8)$$

2. (א) ראה תרגיל 8 שאלה 8.3

(ב) נגדיר פונקציה (לא הומומורפיזם!)

$$f : H \times K \to HK$$

המוגדרת לפי

$$f(h,k) = hk$$

ברור כי הפונקציה היא על כי איבר כלשהוא של HK הוא מהצורה hk ולכן $f(h,k) = hk$. לכן $\mathrm{Im}\, f = HK$ ובפרט $|\mathrm{Im}\, f| = |HK|$. אם HK הייתה חבורה ו f הייתה הומומוריפזם אז היינו שמחים לגלות ש $|\ker f| = |H \cap K|$ ואז לפי משפט האיזומורפיזם הראשון נקבל

$$|HK| = \frac{|H \times K|}{|H \cap K|} = \frac{|H||K|}{|H \cap K|}$$

הבעיה היא כמובן שאין סיבה שזה יקרה. אבל ננסה לחקות את הטיעון. נגדיר יחס שקילות על $H \times K$ לפי:

$$(h_1, k_1) \sim (h_2, k_2)$$

אם

$$f(h_1, k_1) = f(k_2, h_2)$$

כלומר

$$h_1 k_1 = h_2 k_2$$

טענה: גודל כל מחלקת שקילות כזו היא $H \cap K$. אם אנחנו מאמינים לטענה הזאת אז בעצם סיימנו כי כל מחלקת שקילות מתאימה לאיבר בתמונה של f כלומר מספר מחלקות השקילות הוא $|\operatorname{Im} f| = |HK|$ והגודל של $H \times K$ הוא מספר מחלקות השקילות כפול גודל המחלקה. במילים אחרות

$$|H||K| = |H \cap K||HK|$$

שזה בדיוק מה שאנחנו רוצים. אז נשאר להוכיח שגודל כל מחלקת שקילות הוא $|H \cap K|$. ניקח

$$(h_0, k_0) \in H \times K$$

מתי עוד זוג

$$(h, k)$$

נמצא איתו באותה מחלקת שקילות? זה קורה כאשר זה קורה כאשר

$$h_0 k_0 = hk$$

כלומר

$$h^{-1} h_0 = k k_0^{-1}$$

עכשיו נשים לב ש

$$h^{-1} h_0 \in H$$

ו

$$k k_0^{-1} \in K$$

אבל הם שווים ולכן זה איבר של $H \cap K$. אם נסמן ב C את מחלקת השקילות של (h_0, k_0) אז אפשר להגדיר

$$\varphi : B \to H \cap K$$

לפי

$$\varphi(h,k) = h^{-1}h_0 = kk_0^{-1}$$

ברור שזו פונקציה, כדי להוכיח את הדרוש נרצה להוכיח שהיא חד־חד ערכית ועל:

חד חד ערכית: אם

$$\varphi(h_1,k_1) = \varphi(h_2,k_2)$$

אז

$$k_1k_0^{-1} = k_2k_0^{-1}$$

ולכן

$$k_1 = k_2$$

ובדומה

$$h_1^{-1}h_0 = h_2^{-1}h_0$$

ולכן

$$h_1 = h_2$$

על: ניקח $x \in H \cap K$ ואז נסתכל על הזוג

$$(h_0x^{-1}, xk_0)$$

הזוג הזה באותה מחלקת שקילות של (h_0,k_0) כי

$$f(h_0x^{-1}, xk_0) = h_0x^{-1}xk_0 = h_0k_0 = f(h_0,k_0)$$

ואילו

$$\varphi(h_0x^{-1}, xk_0) = xk_0k_0^{-1} = x$$

כנדרש. לכן φ היא חד חד ערכית ועל ולכן הגודל של מחלקת השקילות הוא $H \cap K$.

3. ראו תרגיל בית 6 שאלה 6.5

4. ראו תרגיל בית 12 שאלה 12.1

5. (א) נסמן את הסדר של g שהוא הגודל של $\langle g \rangle$ ב p. $N \cap \langle g \rangle$ היא תת חבורה של $\langle g \rangle$ ולכן הגודל שלה צריך לחלק את p לפי משפט לגרנז'. אז יש שתי אופציות. או ש $|N \cap \langle g \rangle| = p$ אבל אז $N \cap \langle g \rangle = \langle g \rangle$ וזה אומר ש

$$\langle g \rangle \subseteq N$$

כלומר $g \in N$ בסתירה לנתון. ולכן בהכרח

$$|N \cap \langle g \rangle| = 1$$

כנדרש.

(ב) נסמן ב k את הסדר של g. אז

$$(gN)^k = g^k N = eN = N$$

ולכן לפי משפט

$$\mathrm{o}(gN) \mid k$$

(ג) נסמן $\mathrm{o}(gN) = r$ אז

$$(gN)^r = g^r N = N$$

כלומר

$$g^r \in N$$

אבל

$$g^r \in \langle g \rangle$$

ולכן בהכרח לפי הנתון

$$g^r = e$$

ולכן

$$r \mid k$$

בשילוב עם הסעיף הקודם קיבלנו ש

$$r = k$$

כלומר

$$\mathrm{o}(g) = \mathrm{o}(gN)$$

כנדרש.