תרגיל 4 – מופשטת

שאלה 1

א. תהי D_5 החבורה הדיהדרלית מסדר 10. תארו את כל תת־החבורות הלא טריוויאליות של D_5. הוכיחו כי כולן חבורות אבליות.

ב. מצאו תת־חבורה נורמלית לא טריוויאלית של D_5. האם יש יותר מאחת?

שאלה 2

יהיו $H,K\le G$ תת־חבורות. הגדרנו מכפלת תת־חבורות $HK=\{hk:h\in H,\mathrm{k}\in K\}$.

א. הוכיחו כי HK תת־חבורה אם ורק אם $HK=KH$ (גם אם כבר ראיתם זאת בהרצאה!).

ב. הסיקו מהסעיף הקודם כי אם $N\triangleleft G$ תת־חבורה נורמלית, אז $HN\le G$ תת־חבורה.

ג. הוכיחו כי אם $N_1,N_2\triangleleft G$ תת־חבורות נורמליות, אז $N_1\cap N_2\triangleleft G$ וגם $N_1N_2\triangleleft G$ תת־חבורות נורמליות.

שאלה 3

א. הוכיחו שנורמליות היא תורשתית, כלומר: אם $N\le K\le G$ ו- N נורמלית ב- G, אזי N נורמלית ב- K.

ב. הוכיחו שנורמליות אינה טרנזיטיבית, כלומר: מצאו חבורות $N\triangleleft K\triangleleft G$ כך ש- N אינה נורמלית ב- G.

<u>הדרכה</u>: בתפקיד G קחו את A_4. A_4 היא תת חבורה של S_4 המכילה את תמורת הזהות ואת כל התמורות מהצורה $(---),(--)(--)$ (זו חבורה מסדר 12). עבור K היזכרו בחבורה שהכרתם בתרגיל הקודם, ואז חשבו מה אפשר לקחת בתור N.

שאלה 4

עבור כל אחת מן הפונקציות הבאות הוכיחו כי היא הומומורפיזם. בדקו עבור כל פונקציה האם היא מונומורפיזם, האם היא אפימורפיזם והאם היא איזומורפיזם.

א. $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(\mathbb{C}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^5$.

ב. $f:(\mathbb{Q}^*,\cdot)\to(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=x^5$.

ג. $f:G_1\times G_2\to G_2\times G_1$ כאשר $g_1\in G_1,\mathrm{g}_2\in G_2$ איברי חבורות אבליות G_1,G_2 בהתאמה והפונקציה מוגדרת על ידי $f(g_1,g_2)=(\mathrm{g}_2^{-1},\mathrm{g}_1)$.

ד. $f:(\mathbb{R},+)\to(\mathbb{R}_+,\cdot)$ המוגדרת על ידי $f(x)=e^x$.

<u>שאלה 5</u>

א. מצאו אפימורפיזם $\varphi:(M_5(\mathbb{Q}),+)\to(\mathbb{Q}^5,+)$ כאשר $\mathbb{Q}^5$ היא מכפלה קרטזית של חמישה עותקים של $\mathbb{Q}$.

ב. מצאו איזומורפיזם $\varphi:G\to\mathbb{C}^*$ כאשר $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}: a,b\in\mathbb{R}, a^2+b^2>0\right\}$ שהוכחתם בתרגיל 1 שהיא אכן חבורה.

<u>שאלה 6</u>

א. הראו שהומומורפיזם $\varphi:G\to H$ הוא חח"ע אם ורק אם $\ker\varphi=\{1_G\}$.

ב. הראו שאם $\varphi:G\to H$ איזומורפיזם, אזי $o(\varphi(a))=o(a)$ לכל $a\in G$.

ג. הראו שהומומורפיזם מעביר קבוצת יוצרים לקבוצת יוצרים.

<u>שאלה 7</u>

תהי G חבורה ותהיינה $H_1,H_2\le G$ תתי חבורות המקיימות $H_1\cong H_2$. הוכיחו או הפריכו: $[G:H_1]=[G:H_2]$.

בהצלחה!