פתרון תרגיל 4

שאלה 1:

הוכיחו שאין סדרה חיובית המתכנסת ל-0 הכי מהר או הכי לאט.

הדרכה: הראו שאם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה של מספרים חיוביים המקיימת $a_n \to 0$, אזי קיימות סדרות $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ המקיימות $|c_n| < |a_n| < |b_n|$ אבל $b_n \to 0$ וגם $c_n \to 0$.

הוכחה:

אם ניקח למשל $c_n = 2a_n, \quad b_n = \frac{1}{2}a_n$ נקבל מייד הדרוש מאריתמטיקה של גבולות.

שאלה 2:

נניח ש- $\frac{a_n}{b_n} \to c \in \mathbb{R}$. נניח ש- $a_n \to \infty$.

א. אם $c \neq 0$, האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, מה ניתן לומר על הגבול? אם לא, מצאו דוגמא נגדית.

פתרון:

b_n מתכנסת במובן הרחב. נוכיח זאת.

מכיוון ש- $b_n = \frac{a_n}{a_n / b_n}$ נקבל מאריתמטיקה של גבולות (במובן הרחב) ש- $b_n \to \infty \cdot sign(c)$. כלומר אם $c > 0$ נקבל ש $b_n \to \infty$ ואם $c < 0$ נקבל ש $b_n \to -\infty$.

ב. אם $c = 0$, האם b_n חסומה? הוכיחו את תשובתכם (שימו לב: התשובה היא גורפת. כלומר, הוכיחו שהיא חסומה בהכרח, או שהיא לא חסומה בהכרח).

פתרון:

בהכרח b_n אינה חסומה. נניח בשלילה ש b_n חסומה. $a_n = \frac{a_n}{b_n} \cdot b_n$.

כעת, $\frac{a_n}{b_n} \to c = 0$ ו- b_n חסומה ומכאן עפ"י משפט $\frac{a_n}{b_n} \cdot b_n \to 0$. קיבלנו ש$a_n \to 0$ בסתירה לכך שנתון ש $a_n \to \infty$

ג. בסעיף ב', האם b_n מתכנסת (גם במובן הרחב)? אם כן, הוכיחו. אם לא – מצאו דוגמא נגדית.

פתרון:

דוגמא נגדית: $b_n = (-1)^n n^2$ אינה מתכנסת במובן הרחב. ניקח $a_n = n \to \infty$ ומתקיים $\frac{a_n}{b_n} = \frac{(-1)^n}{n} \to 0$.