תזכורת: תהי $A\in\mathbb{F}^{n\times n}$, $\lambda\in\mathbb{F}$ יקרא "ערך עצמי" (ע"ע) של A אם קיים $v\neq 0$ כך ש

$$Av=\lambda v$$

v יקרא ו"ע של A שמתאים לλ.
האוסף של כל הוקטורים העצמיים של A שמתאימים לλ ביחד עם וקטור ה0 נקרא "מרחב עצמי". והוא מרחב וקטורי (הוכחתם בהרצאה).
איך מוצאים ע"ע וו"ע?
1. מחשבים את הפולינום האופייני של A(פ"א)

$$p_A(x)=|xI-A|$$

השורשים של הפולינום הם הע"ע של A.
2. לכל ע"ע- המרחב העצמי הוא

$$N(\lambda I-A)$$

הגדרות: יש λ ע"ע של A
1. הריבוי האלגברי של λ הוא החזקה הכי גבוהה של $(x-\lambda)$ שמחלקת את הפ"א.
2. הריבוי הגיאומטרי של λ הוא המימד של המרחב העצמי שמתאים לλ.

דוגמא: $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&1&-1\\0&2&4\end{pmatrix}$,

$$p_A(x)=|\begin{pmatrix}x-2&-1&0\\0&x-1&1\\0&-2&x-4\end{pmatrix}|=(x-2)|\begin{pmatrix}x-1&1\\-2&x-4\end{pmatrix}|=$$

$$(x-2)[(x-1)(x-4)-1\cdot(-2)]=$$

$$(x-2)(x^2-5x+6)=(x-2)^2(x-3)$$

ע"ע:
$\lambda=2$ עם ריבוי אלגברי-2
$\lambda=3$ עם ריבוי אלגברי- 1 .
מ"ע (מרחב עצמי) של $\lambda=2$

$$N\left(\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&1\\0&-2&-2\end{pmatrix}\right)=N\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$$

ריבוי גיאומטרי (ר"ג) הוא 1
עכשיו נחשב עבור $\lambda = 3$

$$N\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0.5 \\ 0 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$span\left\{\begin{pmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

לכן הריבוי הגיאומטרי הוא 1.
תרגיל: יהיו A, B מטריצות דומות. בהרצאה הוכחתם שיש להם אותו פ"א ולכן אותם ע"ע עם אותו ריבוי אלגברי (ר"א). הוכיחו שלכל ע"ע יש גם את אותו ר"ג.
פתרון: A ו B דומות לכן קיימת P הפיכה כך ש $P^{-1}AP = B$.
יהי λ ע"ע של A ושל B. הריבוי הגיאומטרי של λ ביחס לA שווה ל:

$$\dim N(\lambda I - A)$$

$$\lambda I - A = \lambda PP^{-1} - PBP^{-1} = P(\lambda I - B)P^{-1}$$

כפל במטריצה הפיכה לא משנה את הדרגה. לכן ל$\lambda I - A$ ול$\lambda I - B$ יש את אותה דרגה. כמובן ששתיהן גם מטריצות מאותו גודל. ממשפט הדרגה, ידוע שמימד מרחב האפס של מטריצה שווה לגודל המטריצה (מספר העמודות) פחות דרגת המטריצה.
לכן ל$\lambda I - A$ ו$\lambda I - B$ יש את אותו מימד מרחב אפס.
וזה בדיוק הריבוי הגיאומטרי של λ ביחס לA ושל λ ביחס לB.
שאלה: מה הקשר בין הוקטורים העצמיים של A ביחס לλ והוקטורים העצמיים של B ביחס לλ?
תשובה: יהיו A וB דומות. כלומר, קיימת מטריצה הפיכה P כך ש:

$$P^{-1}AP = B$$

אזי v הוא וקטור עצמי של A אמ"ם $P^{-1}v$ הוא וקטור עצמי של B.
נניח שv הוא וקטור עצמי של A.

$$PBP^{-1}v = Av = \lambda v$$

נכפיל בP^{-1} משמאל.

$$BP^{-1}v = \lambda P^{-1}v$$

כיוון שני: נניח ש$P^{-1}v$ הוא וקטור עצמי של B. אז

$$BP^{-1}v = \lambda P^{-1}v$$

נכפיל מצד שמאל בP

$$PBP^{-1}v = \lambda PP^{-1}v$$

$$Av = \lambda v$$

במילים אחרות. נסמן

$$V_\lambda(A)$$

את המרחב העצמי של λ ביחס לA, וב

$$V_\lambda(B)$$

את המרחב העצמי של λ ביחס לB. אז

$$V_\lambda(B) = P^{-1}V_\lambda(A)$$

כפל במטריצה הפיכה היא העתקה הפיכה. ידוע שהע"ל הפיכה שומרת על מימד. אז זאת דרך נוספת להוכיח שהמימדים שווים.

משפט:

לכל ע"ע, $1 \leq$ ר"ג $\leq$ ר"א.

הגדרה: מטריצה A נקראת לכסינה אם היא דומה למטריצה אלכסונית.

בהרצאה הוכחתם: A לכסינה אמ"ם יש למרחב בסיס שמורכב מו"ע של A.

שקול: פ"א מל"ל (מתפרק לגורמים לינארים)+ לכל ע"ע ר"ג = ר"א.

לדוגמא: $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ לא לכסינה כי עבור ע"ע $\lambda = 2$ הר"א היה 2 והר"ג היה 1.

דוגמא נוספת:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$p_A(x) = (x^2+1)(x-2)(x-3)$$

היא לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$, כי מעל הממשיים התנאי של "פ"א מל"ל" לא מתקיים.

מעל $\mathbb{C}$ הפולינום האופייני כן מל"ל ואז צריך לבדוק את התנאי השני.

$$p_A(x) = (x-i)(x+i)(x-2)(x-3)$$

טענה כללית: אם למטריצה מגודל $n \times n$ יש n ע"ע שונים, אז היא לכסינה.

הוכחה: לכל ע"ע יש לפחות ו"ע אחד. ובנוסף, ו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל (משפט מההרצאה), ולכן אם נקח ו"ע מכל ע"ע נקבל n ו"ע בת"ל- בסיס למרחב.

דרך נוספת: אם יש n ע"ע שונים, אז הר"א של כל ע"ע הוא 1 . (כי סכום הר"א קטן שווה מדרגת הפולינום שווה לn). ר"ג של כל ע"ע הוא בין 1 לר"א של הע"ע, לכן הוא חייב להיות שווה ל1. ולכן הם יהיו שווים. כלומרף קיבלנו שלכל ע"ע הר"א=ר"ג. ובנוסף, הפ"א מל"ל כי אם מכפילים n גורמים לינארים, המעלה המתקבלת היא n, ולכן מכפלת הגורמים הלינאריית חייבת להיות שווה לכל הפולינום.

מסקנה: כששואלים אם מטריצה לכסינה, זה תלוי מעל איזה שדה.

למשל המטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ לא לכסינה מעל $\mathbb{R}$, אבל כן לכסינה מעל $\mathbb{C}$.

שאלה: האם יש קשר בין הפיכות ללכסינות.

תשובה: לא. נדגים כל אחת מהאפשרויות.

לא לכסינה והפיכה

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

יודעים שהיא הפיכה כי אין לה ע"ע 0.

הפיכה ולכסינה:

$$I$$

לא הפיכה ולכסינה:

$$0$$

לא הפיכה ולא לכסינה:

$$J_2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

לא הפיכה. יש לה רק ע"ע 0. (כי היא משולשית אז הע"ע הם איברי האלכסון).

לא לכסינה: יש לה ע"ע יחיד 0 מר"א 2. והריבוי הגאומטרי שלה שווה למימד של המרחב העצמי של וקטור ה0, כלומר, המימד של מרחב ה0 של המטריצה, שהוא 1.

תרגיל: קבעו האם המטריצה הבאה לכסינה. במידה וכן, מצאו את האלכסונית הדומה לה, ואת המטריצה המלכסנת.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

פתרון :=

$$p_A(x)=|\begin{pmatrix} x+1 & -1 & -1\\ -1 & x+1 & -1\\ -1 & -1 & x+1\end{pmatrix}|\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2+R_3}=$$

$$|\begin{pmatrix} x-1 & x-1 & x-1\\ -1 & x+1 & -1\\ -1 & -1 & x+1\end{pmatrix}|=(x-1)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & x+1 & -1\\ -1 & -1 & x+1\end{pmatrix}|\xrightarrow[R_3+R_1]{R_2+R_1}=$$

$$(x-1)|\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & x+2 & 0\\ 0 & 0 & x+2\end{pmatrix}|=(x-1)(x+2)^2$$

יש שני ע"ע : $\lambda=1$ מר"א 1, ו$\lambda=-2$ מר"א 2.
הפ"א מל"ל.
הר"ג של $\lambda=1$ הוא 1 (כי הוא בין 1 לר"א).
לכן נבדוק רק את הר"ג של $\lambda=-2$.

$$N\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\\ -1 & -1 & -1\end{pmatrix}=$$

$$span\left\{\begin{pmatrix} -1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1\\ 1\\ 0\end{pmatrix}\right\}$$

סה"כ המטריצה לכסינה.

$$D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

המטריצה האלכסונית שדומה לA היא מטריצה אלכסונית שעל האלכסון שלה נמצאים הע"ע של A כאשר מספר הפעמים שכל ע"ע מופיע שווה לריבוי האלגברי של הע"ע. (עד כדי שינוי סדר)
המטריצה המלכסנת P שווה למטריצה שהעמודות שלה הן בסיס של וקטורים עצמיים. כאשר סדר העמודות מתאים לסדר הע"ע על האלכסון.
נמצא את הוקטור העצמי שמתאים ל$\lambda=1$:

$$N\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1\\ -1 & 2 & -1\\ -1 & -1 & 2\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ -1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -1\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 0 & 3 & -3\\ 0 & -3 & 3\end{pmatrix}=$$

$$N\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}=N\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

ו"ע- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

אפשר גם לקחת

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ואז

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

תרגיל: האם המטריצות הבאות דומות?

$$\begin{pmatrix} 1 & \pi & e \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 100 & 1 & 0 \\ 1 & 32 & 3 \end{pmatrix}$$

פתרון: לשתיהן יש את אותו פולינום אופייני:

$$(x-1)(x-2)(x-3)$$

שתיהן לכסינות כי לשתיהן יש 3 ע"ע (והמטריצות מגודל 3). אז זאת טענה שעשינו קודם. ויש להן גם את אותה צורה אלכסונית. כלומרף שתיהן דומות למטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

וידוע שדמיון מטריצות הוא טרנזיטיבי. לכן הן דומות בינהן.

תרגיל: לאילו ערכי a, b המטריצה הבאה לכסינה:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix}$$

פתרון:

$$p_A = (x-3)(x-2)^2(x-b)$$

קודם כל נשים לב שהע"ע הם $2,3,b$.

כעת נחלק למקרים.

1. $b\neq 2,3$. במקרה זה הריבויים הגיאומטרים של 3 וb הם בהכרח 1 והם שווים לריבוי האלגברי. נותר לבדוק את הר"ג של 2.

$$N[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & b \end{pmatrix} - 2I] = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & b-2 \end{pmatrix}$$

הדרגה של המטריצה היא 2 כי $b-2\neq 0$, ולכן המימד של מרחב האפס הוא 2.

מסקנה: עבור $b\neq 2,3$ המטריצה לכסינה.

2. $b=2$. הר"ג של 3 הוא 1. נותר לבדוק רק את הר"ג של 2.

$$N[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & 2 \end{pmatrix} - 2I] = N\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

המימד תלוי בערך של a. אם $a=0$ המימד 3 ואם $a\neq 0$ המימד הוא 2.

מסקנה: אם $b=2$ ו$a=0$ המטריצה לכסינה.

אם $b=2$ ו$a\neq 0$ המטריצה לא לכסינה.

3. $b=3$. $p_A(x)=(x-3)^2(x-2)^2$

למעשה במקרה 1 הוכחנו שלכל $b\neq 2$ הר"ג של $\lambda=2$ הוא 2.

לכן גם המקרה שלנו הר"ג הוא 2.

נותר לבדוק את הר"ג של $\lambda=3$.

$$N[\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & a & 0 & 3 \end{pmatrix} - 3I] = N\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

אם $a=0$ המימד של מרחב ה0 (הריבוי הגיאומטרי) יהי 2.

אם $a\neq 0$ אז המימד הוא 1.

לכן עבור $b=3$ ו $a=0$ המטריצה לכסינה.

עבור $b=3$ ו$a\neq 0$ המטריצה לא לכסינה.

המייל שלי: $tamarnachshoni@gmail.com$

סיכומי תרגול+הקלטות עולים ל$math-wiki$.