פתרון המבחן – אלגברה לינארית 1 88-112

מועד א', סמסטר א', תשע"ו

שאלה 1. תהי $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. נניח שקיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך שמתקיים $AB = I$. אזי A ו-B הפיכות.

הוכחה. בהרצאה. $\square$

שאלה 2. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$, ותהי $B = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$ תת-קבוצה של המרחב הווקטורי $\mathbb{R}_2[x]$.

1. הוכח כי B בסיס ל-$\mathbb{R}_2[x]$.
2. מצא במפורש העתקה לינארית $T : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ כך ש-$[T]_B^B = A$.
3. האם ההעתקה שמצאת חח"ע? על? מצא בסיס ומימד עבור $\ker T$ ועבור $\mathrm{Im} T$.

פתרון.

1. נוכיח כי B בת"ל: יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+x) + \gamma \left(1 + x + x^2\right) = 0$$

נקבל

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)\, x + \gamma x^2 = 0$$

כלומר, קיבלנו מערכת משוואות

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

נשים במטריצה, ונקבל

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_3 \to R_2]{R_1 - R_3 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

למערכת הזו יש רק הפתרון הטריוויאלי, $\alpha = \beta = \gamma = 0$, ולכן B בת"ל.
כיוון ש-$|B| = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$, נקבל לפי משפט השלישי חינם ש-B בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

2. **פתרון ראשון:** נלך לפי ההגדרה. רוצים שיתקיים

$$\begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(1)]_B & [T(1+x)]_B & [T(1+x+x^2)]_B \\ | & | & | \end{pmatrix} = [T]_B^B = A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

לכן נקבל

$$[T(1)]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow T(1) = 1 \cdot 1 + 4 \cdot (1+x) + 7 \cdot \left(1+x+x^2\right) = 12 + 11x + 7x^2$$

$$[T(1+x)]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow T(1+x) = 2 \cdot 1 + 5 \cdot (1+x) + 8 \cdot \left(1+x+x^2\right) = 15 + 13x + 8x^2$$

$$\left[T\left(1+x+x^2\right)\right]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix} \Rightarrow T\left(1+x+x^2\right) = 3 \cdot 1 + 6 \cdot (1+x) + 9 \cdot \left(1+x+x^2\right) = 18 + 15x + 9x^2$$

נרצה למצוא העתקה לינארית T המקיימת את הדרישות האלו. ראשית, קיימת T יחידה כזו, לפי משפט ההגדרה. כעת נמצא אותה במפורש: ניקח וקטור כללי $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, ונביע אותו כצירוף לינארי של איברי B. כלומר, מחפשים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+x) + \gamma \left(1+x+x^2\right) = a + bx + cx^2$$

כלומר,

$$(\alpha + \beta + \gamma) + (\beta + \gamma)x + \gamma x^2 = a + bx + cx^2$$

נקבל שוב מערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 - R_3 \to R_2]{R_1 - R_3 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & a-c \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right) \xrightarrow{R_1 - R_2 \to R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b \\ 0 & 1 & 0 & b-c \\ 0 & 0 & 1 & c \end{array}\right)$$

לכן $\alpha = a - b$, $\beta = b - c$, $\gamma = c$. כיוון ש-T העתקה לינארית, נקבל

$$\begin{aligned} T\left(a + bx + cx^2\right) &= T\left((a-b) \cdot 1 + (b-c) \cdot (1+x) + c \cdot \left(1+x+x^2\right)\right) = \\ &= (a-b) \cdot T(1) + (b-c) \cdot T(1+x) + c \cdot T\left(1+x+x^2\right) = \\ &= (a-b)\left(12 + 11x + 7x^2\right) + (b-c)\left(15 + 13x + 8x^2\right) + c\left(18 + 15x + 9x^2\right) = \\ &= (12a + 3b + 3c) + (11a + 2b + 2c)x + (7a + b + c)x^2 \end{aligned}$$

וזו ההעתקה הדרושה.

פתרון שני: ניעזר בנוסחה $[T(v)]_B = [T]_B^B [v]_B$. אנחנו יודעים את $[T]_B^B$, ולכן נותר למצוא את $[v]_B$.

ניקח וקטור כללי $a + bx + cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$, ונביע אותו כצירוף לינארי של איברי B. כלומר, מחפשים $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ שעבורם

$$\alpha \cdot 1 + \beta \cdot (1+x) + \gamma \left(1+x+x^2\right) = a + bx + cx^2$$

כלומר,

$$(\alpha+\beta+\gamma)+(\beta+\gamma)\,x+\gamma x^2=a+bx+cx^2$$

נקבל שוב מערכת משוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\0&1&1&b\\0&0&1&c\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-R_3\to R_2]{R_1-R_3\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&0&a-c\\0&1&0&b-c\\0&0&1&c\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2\to R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a-b\\0&1&0&b-c\\0&0&1&c\end{array}\right)$$

לכן $\alpha=a-b$, $\beta=b-c$, $\gamma=c$. במילים אחרות, $[a+bx+cx^2]_B=\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c\end{pmatrix}$. כעת, נציב בנוסחה ונקבל

$$\left[T\left(a+bx+cx^2\right)\right]_B=[T]_B^B\cdot\left[a+bx+cx^2\right]_B=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a-b\\b-c\\c\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+b+c\\4a+b+c\\7a+b+c\end{pmatrix}$$

ובאופן מפורש,

$$\begin{aligned}T\left(a+bx+cx^2\right)&=(a+b+c)\cdot 1+(4a+b+c)\cdot(1+x)+(7a+b+c)\cdot\left(1+x+x^2\right)=\\&=(12a+3b+3c)+(11a+2b+2c)\,x+(7a+b+c)\,x^2\end{aligned}$$

3. נחשב בסיס לגרעין ולתמונה; כך נוכל לקבוע האם T חח"ע או על.
ראינו בשיעור אלגוריתם לחישוב הגרעין והתמונה באמצעות המטריצה המייצגת; ראשית, צריך לחשב את $N(A)$ ואת $C(A)$. נדרג את A:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\xrightarrow[R_3-7R_1\to R_3]{R_2-4R_1\to R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&-3&-6\\0&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{-\frac{1}{3}R_2\to R_2}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&-6&-12\end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+6R_2\to R_3}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נתחיל מלחשב את $\mathrm{Im}T$; כלומר, צריך למצוא בסיס ל-$C(A)$. הבסיס ל-$C(A)$ הוא העמודות של A כך שבדירוג יש בהן איבר מוביל, אצלנו אלו שתי העמודות הראשונות; לכן, $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $C(A)$. לפי האלגוריתם, הבסיס ל-$C(A)$ הוא וקטורי קואורדינטות של בסיס של $\mathrm{Im}T$; נחשב את הווקטורים במפורש:

$$[p_1]_B=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad p_1=1\cdot 1+4\cdot(1+x)+7\cdot\left(1+x+x^2\right)=12+11x+7x^2$$

$$[p_2]_B=\begin{pmatrix}2\\5\\8\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad p_2=2\cdot 1+5\cdot(1+x)+8\cdot\left(1+x+x^2\right)=15+13x+8x^2$$

ומכאן $B_1=\{12+11x+7x^2,15+13x+8x^2\}$ בסיס של $\mathrm{Im}T$. לכן $\dim\mathrm{Im}T=|B_1|=2$. בפרט, T אינה על (כי $\dim\mathrm{Im}T=2\neq 3=\dim\mathbb{R}_2[x]$).

מכאן נובע גם ש-T אינה חח"ע, כי מדובר בהעתקה לינארית ממרחב לעצמו. נחשב בסיס ל-$\ker T$; נתחיל מלמצוא בסיס ל-$N(A)$. נחזור לצורה המדורגת של A. נניח $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in N(A)$; x_3 משתנה חופשי, לפי הצורה המדורגת, ולכן נסמן $x_3 = t$. נקבל $x_2 = -2t$, $x_1 = t$. לכן $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס של $N(A)$. לפי האלגוריתם, הבסיס ל-$N(A)$ הוא וקטורי קואורדינטות של בסיס של $\ker T$; נחשב את הווקטור במפורש:

$$[p_3]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow p_3 = 1 \cdot 1 - 2 \cdot (1+x) + 1 \cdot \left(1 + x + x^2\right) = -x + x^2$$

ומכאן $B_2 = \{-x + x^2\}$ בסיס של $\ker T$. לכן $\dim \ker T = |B_2| = 1$.
(זה גם מסתדר עם משפט הדרגה, כי $\dim \ker T + \dim \mathrm{Im} T = 1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}_2[x]$).
אפשר גם לחשב את הגרעין ואת התמונה ישירות מהנוסחה של T.

שאלה 3. יהי $V = \mathbb{R}^n$ מרחב וקטורי מעל $\mathbb{R}$, ויהי $v = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \neq 0$ וקטור ב-V. נגדיר

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \right\}$$
$$W = \left\{ \begin{pmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

1. הוכח כי U ו-W תת-מרחבים של V.
2. חשב את המימד של U ואת המימד של W על ידי מציאת בסיסים מתאימים (ניתן להניח ש-$a_1 \neq 0$).
3. הוכח כי $V = U \oplus W$.

פתרון.

1. ניעזר בקריטריון המקוצר. עבור U:
   - $0 \in U$, כי $a_1 \cdot 0 + \cdots + a_n \cdot 0 = 0$.
   - נניח $u_1, u_2 \in U$ ו-$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. צ"ל $\alpha u_1 + \beta u_2 \in U$.
     נסמן $u_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, u_2 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$. $u_1, u_2 \in U$, ולכן

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$$
$$a_1y_1 + \cdots + a_ny_n = 0$$

נשים לב כי

$$a_1\left(\alpha x_1+\beta y_1\right)+\cdots+a_n\left(\alpha x_n+\beta y_n\right)=\alpha\underbrace{\left(a_1x_1+\cdots+a_nx_n\right)}_{=0}+\beta\underbrace{\left(a_1y_1+\cdots+a_ny_n\right)}_{=0}=0$$

ולכן $\alpha u_1+\beta u_2\in U$.

לפי הקריטריון המקוצר, U תת-מרחב של V.
עבור W:

- $0\in W$, כי
$$\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot a_1\\ \vdots\\ 0\cdot a_n\end{pmatrix}\in W$$
- נניח $w_1,w_2\in W$ ו-$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. צ"ל $\alpha w_1+\beta w_2\in W$.
נסמן $w_2=\begin{pmatrix}ya_1\\ \vdots\\ ya_n\end{pmatrix}, w_1=\begin{pmatrix}xa_1\\ \vdots\\ xa_n\end{pmatrix}$. לכן

$$\alpha w_1+\beta w_2=\alpha\begin{pmatrix}xa_1\\ \vdots\\ xa_n\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}ya_1\\ \vdots\\ ya_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\left(\alpha x+\beta y\right)a_1\\ \vdots\\ \left(\alpha x+\beta y\right)a_n\end{pmatrix}\in W$$

כדרוש.

לפי הקריטריון המקוצר, W תת-מרחב של V.

2. צ"ל בסיס ומימד ל-U ול-W.
עבור U: יהי $\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\in U$. לכן

$$a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\Rightarrow x_1=-\frac{a_2}{a_1}x_2-\cdots-\frac{a_n}{a_1}x_n$$

לכן

$$\begin{pmatrix}-\frac{a_2}{a_1}x_2-\cdots-\frac{a_n}{a_1}x_n\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=-\frac{x_2}{a_1}\begin{pmatrix}-a_2\\ a_1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}-\cdots-\frac{x_n}{a_1}\begin{pmatrix}-a_n\\ 0\\ \vdots\\ 0\\ a_1\end{pmatrix}$$

נגדיר $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} \right\}$. לפי מה שהראינו עכשיו, B_1 פורשת את U.
נוכיח כי B_1 בת"ל. יהי צירוף לינארי מתאפס

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + \alpha_{n-1} \begin{pmatrix} -a_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

נקבל

$$\begin{pmatrix} -\alpha_1 a_2 - \cdots - \alpha_{n-1} a_n \\ a_1 \alpha_1 \\ \vdots \\ a_1 \alpha_{n-2} \\ a_1 \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

בפרט, $a_1\alpha_1 = \cdots = a_1\alpha_{n-1} = 0$, וכיוון ש-$a_1 \neq 0$ נקבל $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{n-1} = 0$. לכן B_1 בת"ל.
בסך הכל, B_1 בסיס של U, ומכאן $\dim U = |B_1| = n - 1$.
עבור W: יהי $\begin{pmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{pmatrix} \in W$. לכן

$$\begin{pmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

נגדיר $\{v\} = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \right\} = B_2$. לפי מה שהראינו עכשיו, B_2 פורשת את W. B_2 בת"ל, כי $v \neq 0$. לכן B_2 בסיס של W, ומכאן $\dim W = |B_2| = 1$.

3. צ"ל $V = U \oplus W$. לפי משפט מההרצאה, שקול להוכיח שני דברים:

- $\dim V = \dim U + \dim W$.
- $U \cap W = \{0\}$.

נוכיח:

- לפי חישובי המימדים מהסעיף הקודם,

$$\dim U + \dim W = (n-1) + 1 = n = \dim V$$

- יהי $v \in U \cap W$. $v \in W$, ולכן $v = \begin{pmatrix} xa_1 \\ \vdots \\ xa_n \end{pmatrix}$. אבל $v \in U$, ולכן

$$a_1 \cdot (xa_1) + \cdots + a_n \cdot (xa_n) = 0 \Rightarrow x \cdot \left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right) = 0$$

אבל $a_1 \neq 0$, בפרט $a_1^2 + \cdots + a_n^2 > 0$, ולכן $x = 0$. כלומר $v = 0$, כדרוש.

לפי הקריטריון שצוין, $V = U \oplus W$.

שאלה 4. הוכח או הפרך את הסעיפים הבאים:

1. יהיו U, W, Z תת-מרחבים (לא טריוויאליים) של מרחב וקטורי V כך ש-$U + Z = W + Z$. אזי $U = W$.
2. תהי $0 \neq T : V \to W$ העתקה לינארית. אם $\dim V = \dim W$, אזי T איזומורפיזם.
3. תהי $A \in \mathbb{F}^{2\times 3}$ כך שדרגת A היא 2. אזי קיימת $B \in \mathbb{F}^{3\times 2}$ כך ש-$AB = I_{2\times 2}$.
4. תהיינה $S, T \in \text{Hom}\,(V, V)$ כך שמתקיים $ST = 0$. אזי $S = 0$ או $T = 0$.

פתרון.

1. **הפרכה:** ניקח $V = \mathbb{R}^2$, $U = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$, $W = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, $Z = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$. אזי

$$\begin{aligned} U + Z &= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} + \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2 = V \\ W + Z &= \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} + \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \text{Span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = \mathbb{R}^2 = V \end{aligned}$$

אבל $U \neq W$.

2. **הפרכה:** ניקח $V = W = \mathbb{R}^2$, $T : V \to W$ המוגדרת לפי $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$. זו העתקה לינארית, אך היא אינה חח"ע (כי למשל $T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ולכן הגרעין אינו $\{0\}$), ולכן אינה איזומורפיזם.

3. **הוכחה:** לפי הנתון, $r\,(A) = 2$, כלומר $\dim C\,(A) = r\,(A) = 2$. אבל $C\,(A) \subseteq \mathbb{F}^2$ הוא תת-מרחב, ו-$\dim C\,(A) = \dim \mathbb{F}^2$, ולכן $C\,(A) = \mathbb{F}^2$. בפרט, קיימים $v_1, v_2 \in \mathbb{F}^3$ שעבורם

$$Av_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad Av_2 = e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

נגדיר מטריצה

$$B = \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^{3\times 2}$$

כלומר זו מטריצה שעמודותיה הן v_1 ו-v_2. לפי כפל עמודה-עמודה,

$$A \cdot B = A \cdot \begin{pmatrix} | & | \\ v_1 & v_2 \\ | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Av_1 & Av_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_1 & e_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_{2\times 2}$$

4. **הפרכה:** ניקח $V = \mathbb{R}^2$ מעל $\mathbb{R}$, $T, S : V \to V$ המוגדרות לפי

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

אלו העתקות לינאריות, לפי הקריטריון המקוצר:

$$T\left(\alpha\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 + \beta x_2 \\ \alpha y_1 + \beta y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha y_1 + \beta y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} y_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \beta T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

כמו כן,

$$(ST)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = S\left(T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = S\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $ST = 0$, למרות ש-$S, T \neq 0$, כי למשל $S\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.