תרגול 8

27 ביולי 2021

1 המשך בסיס ומימד

משפטים חשובים:

1. V מ"ו ממימד n. השלישי חינם: כל 2 מבין השלושה גוררים את השלישי
   (א) $|B| = n$
   (ב) $span(B) = V$
   (ג) B בת"ל.
2. משפט המימדים: V מ"ו, $W, U \leq V$ ת"מ. אזי:

$$\dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U)$$

3. למה שימושית מאוד: "הכלה בכיוון אחד ושיוויון מימדיים גורר שיוויון מרחבים":

$$U \subseteq V \wedge \dim U = \dim V \Rightarrow U = V$$

תרגילים:

1. יהא V מ"ו. נסמן $\dim V = n$. יהא W ת"מ, כך ש־ $\dim W = n-1$. הוכיחו שלכל U ת"מ שלא מוכל ב־W מתקיים: $W + U = V$.
   פתרון: ניקח בסיס ל־W נסמנו

$$B_W = \{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$$

מכיון ש־ $W \not\supseteq U$ לכן יש $u \in U \setminus W$ מה שאומר שהקבוצה

$$B' = \{w_1, \ldots, w_{n-1}, u\}$$

בת"ל (כי $u \notin span(B_W) = W$). כעת, נשים לב שתמיד מתקיים $W + U \subseteq V$, מה שצריך להוכיח זה: $V \subseteq W + U$. הוכחה:
יהי $v \in V$. B' קבוצה בת"ל עם n איברים, ולכן לפי השלישי חינם בסיס של V, ולכן יש $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש־

$$v = \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i w_i}_{\in W} + \underbrace{\alpha_n u}_{\in U} \in W + U$$

2. יהא V מ"ו, יהיו $W_1 \subseteq W_2$ שני ת"מ. הוכיחו או הפריכו: כל בסיס של W_2 ניתן לצמצום לבסיס של W_1.
פתרון: הפרכה: ניקח $W_2 = V = \mathbb{R}^2, W_1 = span(\{e_1\})$. נוכל לקחת בסיס ל־$W_2$ שלא ניתן לצמצום לבסיס של W_1, למשל:

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

3. יהא V מ"ו ממימד 5. יהיו W, U ת"מ כך ש־ $\dim W = 4, \dim U = 3$. מצאו מה אפשרויות ל $\dim(W \cap U)$, עם דוגמא לכל אפשרות.

(א) אפשרות ראשונה: $U \subseteq W$ ואז $U \cap W = U$ ונקבל $\dim(W \cap U) = 3$. לדוגמא:

$$V = \mathbb{R}^5, U = span\{e_1, e_2, e_3\}, W = span\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$$

(ב) אפשרות שנייה: אם $U \not\subseteq W$ אז נטען: $\dim(W \cap U) = 2$. הוכחה: לפי שאלה 1, נקבל $W + U = V$, ולכן לפי משפט המימדים:

$$5 = \dim V = \dim(W+U) = \dim W + \dim U - \dim(W \cap U) = 4 + 3 - \dim(W \cap U)$$

לאחר העברת אגפים נקבל:

$$\dim(W \cap U) = 2$$

לדוג':

$$V = \mathbb{R}^5, U = span\{e_1, e_2, e_3\}, W = span\{e_1, e_2, e_5, e_4\}$$

4. יהא V מ"ו ממימד אי־זוגי $\dim V = 2n+1$. יהיו W_1, W_2, U_1, U_2 ת"מ המקיימים:

$$W_1 + W_2 = V = U_1 + U_2$$

הוכיחו:

$$(W_1 \cap U_1) + (W_1 \cap U_2) + (W_2 \cap U_1) + (W_2 \cap U_2) \neq \{0\}$$

פתרון: מספיק להוכיח שאחד מהם הוא לא וקטור האפס בלבד.
טענה: $\dim W_1 \geq n+1 \vee \dim W_2 \geq n+1$.
הוכחה: אם בשלילה $\dim W_1, \dim W_2 \leq n$ אז נקבל:

$$2n+1 = \dim V = \dim(W_1+W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_!\cap W_2) \leq 2n - \dim(W_1 \cap W_2) \leq 2n$$

בסתירה. אותו דבר בדיוק על U_1, U_2. נסמן את תתי המרחבים בעלי מימד $n+1$ לפחות ב־ W_i, U_j. כמובן $W_i + U_j \subseteq V$, ולכן:

$$2n+1 = \dim V \geq \dim(W_i + U_j) = \dim(W_i) + \dim(U_j) - \dim(W_i \cap U_j) \geq 2n+2 - \dim(W_i \cap U_j)$$

ולכן

$$\dim(W_i \cap U_j) \geq 1$$

מש"ל.

5. הפריכו את הטענה כאשר המימד זוגי טבעי.
פתרון:

6. יהי V מ"ו, W_1, W_2 ת"מ המקיימים:

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

הוכיחו שאחד מהם מוכל בשני.
פתרון: נתבונן למשל על W_1:

$$W_1 \cap W_2 \subseteq W_1 \subseteq W_1 + W_2$$

ולכן:

$$\dim(W_1 \cap W_2) \leq \dim W_1 \leq \dim(W_1 + W_2) = \dim(W_1 \cap W_2) + 1$$

אם נסמן $\dim(W_1 \cap W_2) = k$, אז $k \leq \dim W_1 \leq k+1$, ומכיון שהוא מספר טבעי, אז הוא חייב להיות שווה לאחד מהם. נחלק למקרים:

(א) אם $\dim W_1 = k$ אז מההכלה $W_1 \cap W_2 \subseteq W_1$ ושיוויון המימדים נקבל שיוויון מרחבים, ולכן $W_1 \subseteq W_2$.

(ב) אם $\dim W_1 = k+1$ אז מההכלה $W_1 \subseteq W_1 + W_2$ ושיוויון מימדים נקבל שיוויון מרחבים, ולכן $W_2 \subseteq W_1$.

7. יהא V מ"ו, $B \subseteq V$ ת"ק. הוכיחו: (B בסיס) אמ"ם ($0 \notin B$ ולכל $A \subseteq B$ מתקיים: $V = span(A) \oplus span(B \setminus A)$).

פתרון: $\Leftarrow$. ראשית ברור $0 \notin B$ כי אחרת הוא ת"ל. בנוסף, תהי $A \subseteq B$ נראה סכום:

$$span(A) + span(B \setminus A) = span(A \cup (B \setminus A)) = span(B) = V$$

נראה שהחיתוך זה וקטור האפס בלבד: ראשית, אם $A = \emptyset$ אז $span(A) = \{0\}$ ולכן גם החיתוך. בדומה, אם $A = B$ אז $span(B \setminus A) = \{0\}$ ולכן גם החיתוך.
כעת, יהי $v \in span(A) \cap span(B \setminus A)$, לכן ישנם $v_1, \ldots, v_k \in A, u_1 \ldots, u_m \in B \setminus A$ כך ש־

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = v = \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$$

נקבל:

$$0 = v - v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$$

אבל $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i - \sum_{i=1}^{m} \beta_i u_i$ צריוף לינארי של וקטורים מ־B, ומכיון ש־B בסיס לכן הוא בת"ל, ולכן כל המקדמים הם 0, ולכן $v = 0$.

$\Rightarrow$: נתון: ($0 \notin B$ ולכל $A \subseteq B$ מתקיים: $V = span(A) \oplus span(B \setminus A)$).
B פורשת:

$$V = span(A) \oplus span(B \setminus A) = span(B)$$

(אפשר גם: עבור $A = \emptyset$ נקבל $V = span(B)$, ולכן B פורשת את V.)
B בתל: נב"ש B לא בת"ל, לכן יש $0 \neq u \in B$ שהוא צ"ל של שאר הוקטורים מ־B, כלומר ישנם $v_1 \ldots, v_k \in B \setminus \{u\}$ כך ש־

$$u = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in span(B \setminus \{u\})$$

ואז עבור $A = \{u\}$ ונקבל:

$$u \in span(A) \cap span(B \setminus A)$$

בסתירה לכך שהסכום ישר. לכן B בת"ל, ולכן בסה"כ B בסיס ל־V.

2 מרחבי המטריצה

תהי $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$. דיברתם בהרצאה על שלושה מרחבי המטריצה:

- $C(A) \le \mathbb{F}^m$, מרחב העמודות ־ המרחב הנפרש ע"י עמודות A
- $R(A) \le \mathbb{F}^n$, מרחב השורות ־ המרחב הנפרש ע"י שורות A.
  - דרגת המטריצה: $rank(A) = \dim C(A) = \dim R(A)$.
- $N(A) \le \mathbb{F}^n$, מרחב האפס ־ מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המיוצגת ע"י A.

איך מוצאים בסיסים למרחבים אלו? מדרגים את המטריצה, ואז:

- העמודות של A המתאימות לעמודות עם איבר מוביל במדורגת מהוות בסיס למרחב העמודות.
- השורות במדורגת שלא מתאפסות בסוף הדירוג מהוות בסיס למרחב השורות.
- "הפתרונות היסודיים" מהווים בסיס, כפי שעשינו עד כה.

משפטים:

- $\dim C(A) = \dim R(A)$
- משפט הדרגה: $\dim N(A) + rank(A) = n$.
- מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אמ"ם $rank(A) = n$.

תרגילים:

1. מצאו בסיסים למרחבי המטריצה של $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

   פתרון: נדרג:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   הגענו לצורה מדורגת, ולכן:

$$B_{C(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{R(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$B_{N(A)} = \left\{ \begin{pmatrix} -2s-3t \\ -s \\ t \\ s \end{pmatrix} \right\} = span \left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

2. תהי $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. נגדיר $B = \begin{pmatrix} A \\ A \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} A \\ A^t \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n\times n}$. הוכיחו או הפריכו:

(א) $\forall A : rank(A) = rank(B)$

(ב) $\forall A : rank(A) = rank(C)$

(ג) $\exists A : rank(C) = 2rank(A)$

(ד) $\exists A : rank(C) > 2rank(A)$

פתרון: א. הוכחה: ראשית, נבצע n פעולת שורה:

$$\forall n+1 \leq i \leq 2n : R_i - R_{i-n} \to R_i$$

ונקבל שכל n השורות האחרונות הן שורות אפסים. ולכן שורות בת"ל ב־B הן בדיוק אותן שורות בת"ל ב־ A, ולכן הדרגה זהה.

הפרכת ב+ הוכחת ג: נמצא מטריצה שעונה על ג והיא מפריכה את ב גם. ניקח

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$rank(C) = 2 = 2 \cdot 1 = 2rank(A)$$

ד. הפרכה: צריך להוכיח שלכל A $rank(C) \leq 2rank(A)$. הוכחה: תהי A, ונסמן $rank(A) = k$. לכן יש k שורות ועמודות בת"ל ב־ A. בגלל ששורות A הן העמודות של A^t וכן עמודות A הן השורות של A^t, נקבל שב־ A^t יש k שורות בת"ל. ולכן ב־ C יש לכל היותר $2k$ שורות בת"ל (לא יכולות להיווצר שורות בת"ל משום מקום, אולי יכולות להיהרס). בסה"כ $rank(C) \leq 2k$.

3. השלמה והפחתה לבסיס:

(א) השלימו את קבוצת הוקטורים (נתון בת"ל) הבאה:

$$\left\{\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix}\right\}$$

לבסיס של $\mathbb{C}^4$.

פתרון: נשים את קואורדינטות הוקטורים (המקדמים שלהם, אם תרצו) בעמודות מטריצה, ונסויף להם עמודות מוקטורים פשוטים המהווים בסיס למרחב:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת נדרג, ומכיון שהם בת"ל, אז יהיה איבר מוביל בשתי העמודות הראשונות, ונוסיף עוד שני וקטורים מעמודות נוספות עם איבר מוביל:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2+i & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-i & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+4i & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2-\frac{1-i}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-i}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1+4i & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3-\frac{-1+4i}{5}R_4} \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1-i}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & \frac{-1+4i}{5} \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1+i & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{1-i}{2} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & \frac{-1+4i}{5} \end{pmatrix}$$

קיבלנו צורה מדורגת עם איברים מובילים בארבעת העמודות הראשונות, ולכן ארבעת העמודות הראשונות של המטריצה המקורית מהוות בסיס למרחב שלנו:

$$B = \left\{\begin{pmatrix} 1+i \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \\ 2+i \\ 5 \end{pmatrix}, e_1, e_2\right\}$$

(ב) מצאו תת קבוצה של

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

המהווה בסיס ל-$\mathbb{R}^3$.

פתרון: נשים בעמודות מטריצה, נדרג, ואז העמודות המתאימות במקורית לאיברים מובילים מהוות בסיס:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ולכן ניקח את העמודות: 1,2,4 מהקבוצה שלנו.

4. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ כך ש- $rank(A) = r$. הוכיחו שקיימת תת־מטריצה מגודל $r \times r$ הפיכה.

פתרון: מהדרגה r נקבל יש r שורות בת"ל, ניקח אותן, ונקבל מטריצה $B \in \mathbb{F}^{r\times n}$ עם r שורות בת"ל. מספר שורות בת"ל = מספר עמודות בת"ל, ולכן יש r עמודות בת"ל של B. ניקח אותן ונקבל מטריצה $C \in \mathbb{F}^{r\times r}$ עם דרגה r ולכן (לפי המשפט מההרצאה) היא הפיכה.