

# תרגיל 4

## להגשה עד 4.12.17

### תרגיל 1

1. יהי  $(X, \tau)$  מרחב טופולוגי.  
הוכיחו כי אם  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  רציפה אזי  $f$  פונקציה בורלית (כלומר: מדידה- $\mathbb{B}(X)$ , באשר:  $\mathbb{B}(X) = \sigma(\tau)$ ).
2. יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, באשר  $\mathbb{A} = \mathbb{P}(X)$ . אילו מהפונקציות  $f: X \rightarrow \mathbb{R}$  מדידות- $\mathbb{A}$ ?

### שאלה 2

- יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ולכל  $i \in \{1, 2, 3\}$  תהי  $f_i: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציה מדידה- $\mathbb{A}$ .  
לכל  $x \in X$ , נתבונן במשוואה:  $g_x(t) := f_1(x)t^2 + f_2(x)t + f_3(x) = 0$ . זוהי למעשה משוואה ריבועית עם משתנה  $t$ .  
הוכיחו כי קבוצת כל ה- $x$ ים עבורם לפונקציה  $g_x$  יש שני שורשים שונים הינה מדידה- $\mathbb{A}$ , כלומר:  
$$\{x \in X \mid \exists t_1, t_2 : t_1 \neq t_2 \text{ and } g_x(t_1) = g_x(t_2) = 0\} \in \mathbb{A}$$

### שאלה 3

- יהי  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ויהיו  $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$  פונקציות מדידות- $\mathbb{A}$ . הראו כי הפונקציה:  $h(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \mathbf{1}_{[g \neq 0]}(x)$  הינה מדידה- $\mathbb{A}$ .

### שאלה 4

- יהיו  $(X, \mathbb{A})$  מרחב מדיד, ו- $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ . הוכיחו או הפריכו:
- אם  $|f|$  מדידה אזי  $f$  מדידה.
  - אם  $f^3$  מדידה אזי  $f$  מדידה.

### שאלה 5

יהיו  $A, A_n$  מדידות לבג. נתון כי  $\rho(A_n, A) \rightarrow 0$ . האם נובע כי:

1.  $\mathbf{1}_{A_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{a.e.} \mathbf{1}_A$  ?

2.  $\mathbf{1}_{A_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m} \mathbf{1}_A$  ?

בהנאה (: