1 ׳ <u>טורים כלליים</u>

<u>הגדרה:</u> טור כללי זה טור שהאיבר הכללי שלו a_n לא בהכרח מספר חיובי, כלומר לא בהכרח מתקיים $\forall n \in \mathbb{N}: a_n \geq 0$

<u>הערה:</u> בתרגול הקודם ראינו מבחני התכנסות עבור טורים חיוביים, אבל אם הטור אינו חיובי, לא ניתן להשתמש בהם.
בתרגול זה נכיר הגדרות ומשפטים שמאפשרים לנו לבחון התכנסות של טורים כלליים.

* נכיר שני סוגים של התכנסות עבור <u>טורים כלליים</u>:

<u>הגדרות:</u>

1. נאמר שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ הוא מתכנס בהחלט אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ (טור של ערכים מוחלטים) הוא טור מתכנס.

<u>משפט:</u> טור שמתכנס בהחלט הוא טור מתכנס.

<u>הערה:</u> אם הטור לא מתכנס בהחלט זה לא אומר שהוא <u>לא מתכנס</u>
כלומר אם $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ הוא טור מתבדר, הטור המקורי $\sum a_n$ יכול להתכנס או להתבדר.

2. נאמר שהטור $\sum a_n$ מתכנס בתנאי אם הוא טור מתכנס אבל לא מתכנס בהחלט, כלומר הטור מתכנס בתנאי אם הוא מתכנס אבל הטור של ערכים מוחלטים שלו $\sum |a_n|$ הוא טור מתבדר.

(2) דוגמאות: נבדוק התכנסות בהחלט על הטורים הבאים:

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{3^n}$$

פתרון: נשים ערך מוחלט על האיבר הכללי ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n \cdot n}{3^n} \right| = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}}_{\text{טור חיובי}}$$

נשתמש במבחן המנה, למשל:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\downarrow 1} \cdot \frac{\cancel{3^n}}{\cancel{3^n} \cdot 3} = \frac{1}{3} < 1$$

לכן הטור של ערכים מוחלטים (ע"מ) מתכנס

$\Downarrow$

הטור שלנו מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

(2) $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

נשים ערך מוחלט על האיבר הכללי ונקבל:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \infty$$

הוכחנו שהטור של ע"מ מתבדר, כלומר הטור שלנו לא מתכנס בהחלט.

** עם זאת לא ניתן להסיק שום דבר על התכנסות של הטור המקורי, כפי שנראה בהמשך הטור הזה הוא טור מתכנס (מתכנס בתנאי לפי מבחן לייבניץ)

③ הערה: כפי שמצאנו לכן, כאשר שמים
ערך מוחלט על האיבר הכללי, לא הופך את
הטור לטור חיובי ומאפשר לנו להשתמש
בכל המבחני ההתכנסות לטורים חיו"ם
שראינו עד עכשיו.

* אם הטור לא מתכנס בהחלט, וכמובן
התכנסות בתנאי באמצעות שני משפטים:
משפט לייבניץ, מבחן דיריכלה.

הגדרה: טור מהצורה $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ כאשר $\forall n\in\mathbb{N}: a_n>0$
נקרא טור מחליף סימן.

למשל, טור מהצורה הבאה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$ הוא
טור מחליף סימן כי $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}>0$.

משפט לייבניץ

יהי $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$ טור מחליף סימן.

אם מתקיים:

① $\{a_n\}$ היא סדרה של מספרים חיו"ם
ומונוטונית יורדת.

② $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n$ נקרא טור לייבניץ
והוא מקיים:

א) הטור מתכנס
ב) נסמן את סכום הטור ב- S

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot a_n=S$$

אזי $0<S<a_1$

כלומר הטור חסום מלמעלה ע"י האיבר הראשון a_1

דוגמאות:

1) נסתכל על הדוגמא שראינו:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}$$

ונראה שזה טור לייבניץ ומזה נסיק
שהוא טור מתכנס.

נסמן $\forall n\in\mathbb{N}: 0<a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\longrightarrow 0$

נבדוק מונוטוניות:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}<\sqrt{\frac{n+1}{n+1}}=\sqrt{1}=1$$

ולכן a_n מונוטונית יורדת.

$\Downarrow$

הטור שלנו מקיים את תנאי משפט
לייבניץ ולכן מתכנס.

2)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(\log(n))^2}$$

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(\log(n))^2}\right|=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(\log(n))^2}\Rightarrow$$ טור חיובי קיבלנו

נשתמש במבחן העיבוי!

$$\forall n\in\mathbb{N}: 0<\frac{1}{(\log(n))^2}\longrightarrow 0$$

נבדוק מונוטוניות:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(\log(n+1))^2}}{\frac{1}{\log(n)^2}}=\left(\frac{\log(n)}{\log(n+1)}\right)^2<1^2=1$$

$\Downarrow$

הסדרה היא מונוטונית יורדת.

(5) נתבונן בטור $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{(\log(2^n))^2} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{(n\log(2))^2} =$$

$$= \frac{1}{(\log 2)^2} \cdot \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}}$$

לפי מבחן המנה (דלמבר)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} \cdot \frac{n^2}{2^n} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 \cdot \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2 > 1$$

לכן הטור $\sum_{n=2}^{\infty} 2^n \cdot a_{2^n}$ מתבדר

$\Downarrow$

הטור $\sum \frac{1}{(\log(n))^2}$ מתבדר

$\Downarrow$

הטור של ע"מ הנו טור מתבדר

$\Downarrow$

הטור שלנו לא מתכנס בהחלט

* נבדוק התכנסות בתנאי.

נשים לב שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(\log(n))^2}$ הנו

טור מחליף סימן כאשר $\forall n \in \mathbb{N}: \cancel{\ } 0 < a_n = \frac{1}{(\log(n))^2}$

כמו כן ראינו ש $a_n = \frac{1}{(\log(n))^2}$ הנו סדרה

מונוטונית יורדת ושואפת לאפס

$\Downarrow$

הטור הנו טור לייבניץ

$\Downarrow$

מתכנס

$\Downarrow$

הטור שלנו מתכנס בתנאי.

תרגיל:

בדקו האם הטור הבא מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}\sin(n)+n}{n^2}$$

פתרון:

קודם כל נזכר בטבלה הבאה:

1. טור מתכנס + טור מתכנס = טור מתכנס
2. טור מתכנס + טור מתבדר = טור מתבדר
3. מתבדר + מתבדר = אי אפשר לדעת הכל יכול להיות.

חזרה לתרגיל:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin(n)}{n^{3/2}}+\frac{1}{n}\right) = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^{3/2}}}_{1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}}_{2}$$

$\boxed{\text{באופן כללי הפיצול הזה לא חוקי, פרט לשני המקרים הראשונים:}}$

1) מתכנס + מתכנס
2) מתכנס + מתבדר.

1) הטור הראשון הוא טור מתכנס בהחלט ולכן מתכנס:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin(n)}{n^{3/2}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(n)|}{n^{3/2}}$$

$$\frac{|\sin(n)|}{n^{3/2}} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$$

7) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ מתכנס ולכן הטור של ע"מ מתכנס

$\Downarrow$

$\sum \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}$ מתכנס בהחלט ולכן מתכנס.

2) $\sum \frac{1}{n}$ הוא טור מתבדר (טור הרמוני)

$\Downarrow$

אנחנו במקרה השני

מתבדר + מתכנס

$\Downarrow$

הטור שלנו הוא טור מתבדר

משפט (מבחן דיריכלה)

הערה: אם הטור לא בהכרח מחליף סימן, ונשתמש במשפט דיריכלה רק לבדוק את ההתכנסות.

נתון טור $\sum a_n \cdot b_n$. נניח:

א. הסדרה $\{a_n\}$ היא מונוטונית ושואפת לאפס.

ב. הטור $\sum b_n$ חסום (כלומר הס"ח שלו S_n היא סדרה חסומה)

אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$ הוא טור מתכנס.

תרגיל: האם הטור הבא מתכנס בהחלט / מתכנס בתנאי או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n}$$

הטור אינו מתכנס בהחלט.

הוכחה קצרה קשה לכתוב בשלב זה של הקורס ולכן לא נעבור אותה כאן.

נבדוק התכנסות באמצעות מבחן דיריכלה.

נרשום את הטור באופן הבא:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{n}}_{a_n} \cdot \underbrace{\sin(2n)}_{b_n}$$

צ"ל:

1) $a_n \to 0$ $\left(=\frac{1}{n}\right)$ ומונוטוני

2) הסס'ח של $b_n=\sin(2n)$ היא סדרה חסומה.

הוכחה:

1. ברור ש $a_n=\frac{1}{n}\to 0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=\frac{n}{n+1}<1$

ולכן היא גם מונוטונית

2) נראה שהס"ח של $\sin(2n)$ חסומה:

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\sin(2n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{2\sin(2k)\cdot\sin(1)}{2\sin(1)}=$$

נשתמש בזהות הטריגונומטרית הבאה:

$$2\sin(\alpha)\cdot\sin(\beta)=\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$$

במקרה שלנו: $\alpha=2n$ $\beta=1$

$$=\frac{1}{2\sin(1)}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(2k-1)-\cos(2k+1)\right)=$$

$$=\frac{1}{2\sin(1)}\left(\cos(1)-\cancel{\cos(3)}+\cancel{\cos(3)}-\cancel{\cos(5)}+\cancel{\cos(5)}-\cos(7)+\ldots+\cos(2k-1)-\cos(2n+1)\right)=\frac{1}{2\sin(1)}\left(\cos(1)-\cos(2n+1)\right)$$

(נראה ש-סס"ח חסומה:

$$|S_n| = \left|\frac{1}{2\sin(1)}\left(\cos(1)-\cos(2n+1)\right)\right| \le$$

$$\le \frac{1}{2\sin(1)}\left(|\cos(1)|+|\cos(2n+1)|\right) \le$$

$$\le \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}\sin(1)} = \frac{1}{\sin(1)}$$

$\Downarrow$

S_n חסומה ע"י $\frac{1}{\sin(1)}$

$\Downarrow$

לפי משפט דיריכלה הטור שלנו

מתכנס כפי שצריך להוכיח

$\Downarrow$

מתכנס בתנאי.

תרגיל: בדוק את התכנסות של הטור

$$1+\frac{1}{3}-\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{2}{11}+\dots$$

פתרון: קודם כל ניתן לבדוק את הטור הנ"ל ע"י נוסחה $\sum a_n$ כמו שראינו בפונקציות האחרונה, אבל בגלל זאת לא דרשה ל-כן אין הטור מתכנס:

נשים לב ~~שבמונה~~ שבמכנה מופיעים כל הטבעיים האי זוגיים, ובמונה מופיעים מספרים $1,1,-2,1,1,-2,\dots$.

נבדוק התכנסות בהחלט:

$$|1|+\left|\frac{1}{3}\right|+\left|-\frac{2}{5}\right|+\left|\frac{1}{7}\right|+\left|\frac{1}{9}\right|+\left|-\frac{2}{11}\right|+\dots =$$

$$= 1+\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{2}{11}+\dots \ge$$

$$\ge 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\dots = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$$

(10) הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ הוא טור מתבדר

$\Downarrow$

הטור של ע"מ מתבדר

לפי מבחן ההשוואה הראשון

$\Downarrow$

הטור שלנו לא מתכנס בהחלט

ונבדוק התכנסות בתנאי.

נסמן) $a_n = \frac{1}{2n-1}$ $b_n = \{1, 1, -2, 1, 1, -2, \ldots\}$

$\Downarrow$

הטור שלנו הוא מהצורה

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot b_n$$

<u>הסבר:</u>

$n=1$: $a_1 = 1$ $b_1 = 1$ $\Leftarrow$ $a_1 \cdot b_1 = 1$
האיבר הראשון בטור

$n=2$: $a_2 = \frac{1}{3}$ $b_2 = 1$ $\Leftarrow$ $a_2 \cdot b_2 = \frac{1}{3}$
האיבר השני בטור

$n=3$: $a_3 = \frac{1}{5}$ $b_3 = -2$ $\Leftarrow$ $a_3 \cdot b_3 = -\frac{2}{5}$
האיבר השלישי בטור.

$\vdots$

(נראה ש a_n, b_n מקיימות תנאי משפט דיריכלה.

1. $a_n = \frac{1}{2n-1} \to 0$ ומונוטונית.

2. (נראה שס"ח של $\sum b_n$ חסומה.

$$S_n = \begin{cases} 0 & n=3k \\ 2 & n=3k-1 \\ 1 & n=3k-2 \end{cases}$$

הסבר:

$$S_1 = b_1 = 1$$

$$S_2 = b_1 + b_2 = 2$$

$$S_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 1+1-2 = 0$$

$$S_4 = b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = S_3 + b_4 = 1$$

$$S_5 = S_4 + b_5 = 1+1 = 2$$

$$S_6 = S_5 + b_6 = 2-2 = 0$$

$$\vdots$$

$$\Downarrow$$

$$0 \le S_n \le 2$$

$$\Downarrow$$

חסומה

$$\Downarrow$$

הטור מתכנס לפי דיריכלה

לא מתכנס בהחלט

$$\Downarrow$$

מתכנס בתנאי.