# פתרון תרגיל 6 – אינפי 1

**שאלה 1**

נתונות שתי סדרות $\{a_n\}$ ו $\{b_n\}$, נתון שהסדרה $\{a_n+b_n\}$ חסומה, ונתון $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$.

מצאו את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$.

**פתרון**

נוכיח תחילה ש $b_n\to-\infty$. נראה שלכל $M>0$ קיים $n_0$ כך שלכל $n\ge n_0$ $b_n<-M$. יהי $M>0$. $\{a_n+b_n\}$ חסומה מלעיל נגיד על ידי $R$ (כלומר $a_n+b_n\le R$). $a_n\to\infty$ ולכן קיים $n_0$ כך שלכל $n\ge n_0$ מתקיים $a_n>R+M$, ולכן לכל $n\ge n_0$ $R+M+b_n<a_n+b_n\le R$ ולכן $b_n<R-(R+M)=-M$ לכל $n\ge n_0$

כלומר $b_n\to-\infty$, ולכן $\frac{1}{b_n}\to 0$.

$\frac{a_n+b_n}{b_n}=(a_n+b_n)\frac{1}{b_n}\to 0$ מכיוון שסדרה חסומה כפול סדרה ששואפת לאפס שואפת לאפס. מתקיים $\frac{a_n+b_n}{b_n}-\frac{b_n}{b_n}=\frac{a_n}{b_n}\to 0-1=-1$ לפי אריתמטיקה של גבולות. ולסיכום $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=-1$.

**שאלה 2**

תהי $\{a_n\}$ סדרה של מספרים ממשיים. נתון שתתי הסדרות $\{a_{2n}\},\{a_{2n+1}\},\{a_{5n}\}$ מתכנסות במובן הצר. הוכיחו או הפריכו: $\{a_n\}$ מתכנסת במובן הצר.

**פתרון**

נסמן $\lim a_{2n}=a, \lim a_{2n+1}=b, \lim a_{5n}=c$. כעת, הסדרה $\{a_{10n}\}$ היא תת סדרה של $\{a_{2n}\}$ וגם של $\{a_{5n}\}$. תת סדרה של סדרה מתכנסת, מתכנסת לאותו הגבול של הסדרה המקורית, ולכן $\lim a_{10n}=\lim a_{2n}=\lim a_{5n}$ ולכן $a=c$. בנוסף, $\{a_{10n+5}\}$ היא תת סדרה של $\{a_{5n}\}$ וגם של $\{a_{2n+1}\}$ ומקבלים $b=c$. לסיכום, מקבלים $a=b$ ולכן הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת (לפי מה שהוכחנו בכיתה אודות התכנסות תתי הסדרות של האינדקסים הזוגיים ואי-זוגיים).

**שאלה 3**

הוכיחו שהסדרה $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ היא סדרה יורדת ומצאו את גבולה.

**פתרון**

$$\frac{x_{n-1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^n}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{n^n n^{n+1}}{(n-1)^n(n+1)^{n+1}}=\frac{n^{2n+1}}{(n^2-1)^n(n+1)}=$$

$$=\frac{(n^2)^n n}{(n^2-1)^n(n+1)}=\left(1+\frac{1}{n^2-1}\right)^n\frac{n}{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^n\frac{n}{n+1}\underset{\text{ברנולי}}{\ge}\left(1+n\cdot\frac{1}{n^2}\right)\frac{n}{n+1}=$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{n}{n+1}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n}{n+1}=1$$

ולכן $\frac{x_{n-1}}{x_n}\ge1 \ \rightarrow\ x_{n-1}\ge x_n \ \rightarrow\ x_n\searrow$.

גבולה של הסדרה הוא $e$, שכן מתקיים $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\rightarrow e\cdot1=e$

## **<u>שאלה 4</u>**

הוכיחו: $\overline{\lim}a_n=-\underline{\lim}(-a_n)$.

**<u>פתרון</u>**

נפתור באמצעות סדרות.

נוכיח אי שוויון בשני הכיוונים.

<u>הכיוון הראשון:</u> $\overline{\lim}a_n\le-\underline{\lim}(-a_n)$.

לפי הגדרת הגבול העליון קיימת תת סדרה של $\{a_n\}$ המקיימת: $a_{n_k}\rightarrow\overline{\lim}a_n$.

נכפיל במינוס אחד (מדוע מותר לעשות זאת? אריתמטיקה של גבולות... ☺ )

ונקבל: $-a_{n_k}\rightarrow-\overline{\lim}a_n$. מכיוון ש- $\{-a_{n_k}\}$ היא תת סדרה של $\{-a_n\}$, מקבלים ש-$\left(-\overline{\lim}a_n\right)$ הוא גבול חלקי של סדרה זו. מכיוון ש- $\underline{\lim}(-a_n)$ הוא הגבול החלקי הקטן ביותר, נקבל $\underline{\lim}(-a_n)\le-\overline{\lim}a_n$. נכפיל את שני האגפים ב- $(-1)$ ונקבל: $-\underline{\lim}(-a_n)\ge\overline{\lim}a_n$, כדרוש (בכיוון הזה).

<u>הכיוון השני:</u> $\overline{\lim}a_n\ge-\underline{\lim}(-a_n)$

לפי הגדרת גבול תחתון (הפעם לגבי הסדרה $\{-a_n\}$) קיימת תת סדרה המקיימת: $-a_{n_k}\rightarrow\underline{\lim}(-a_n)$. שוב, זה שקול ל- $a_{n_k}\rightarrow-\underline{\lim}(-a_n)$. בנוסף, $\overline{\lim}a_n$ הוא הגבול החלקי הגדול ביותר של $\{a_n\}$ ולכן $-\underline{\lim}(-a_n)\le\overline{\lim}a_n$ ולכן $\underline{\lim}a_n\le-\overline{\lim}(-a_n)$. כאן סיימנו את הוכחת הכיוון השני, ולכן גם את הוכחת כל התרגיל.

## **שאלה 5**

הוכיחו שאם $\{a_n\}$ מתכנסת ו $\{b_n\}$ חסומה אזי $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$

## **פתרון**

$\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של $b_n$ לכן קיימת תת סדרה $\{b_{n_k}\}$ כך ש $b_{n_k}\to\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$. $\{a_n\}$ מתכנסת, נגיד לגבול $L$, לכן כל תת סדרה שלה מתכנסת לגבול $L$ ולכן $a_{n_k}\to L$ ו $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=L$. ולכן לפי אריתמטיקה של גבולות $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ כלומר זה גבול חלקי של הסדרה $a_n+b_n$.

$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$ הינו הגבול החלקי הגדול ביותר של הסדרה $a_n+b_n$, ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n\le\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$.

בכיוון ההפוך, קיימת תת סדרה של $a_n+b_n$, שהיא $a_{n_k}+b_{n_k}$ כך ש $\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)$. שוב, $\{a_n\}$ מתכנסת ולכן גם כל תת סדרה שלה מתכנסת ולכן $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\lim_{n\to\infty}a_n=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ ולפי אריתמיטקה של גבולות,

$$\lim_{k\to\infty}b_{n_k}=\lim_{k\to\infty}(b_{n_k}+a_{n_k}-a_{n_k})=\lim_{k\to\infty}(a_{n_k}+b_{n_k})-\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$$

ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)-\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\lim b_{n_k}\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$ ולכן $\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)\le\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n$

לסיום, אם $a\le b$ וגם $b\le a$ אזי $a=b$, במקרה שלנו קיבלנו

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(a_n+b_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}b_n$$

## **שאלה 6**

בדקו האם הסדרה הבאה מתכנסת: $a_n=\frac{1}{3^1+1}+\frac{1}{3^2+2}+...+\frac{1}{3^n+n}$.

## **פתרון**

נוכיח שהסדרה היא קושי ומכאן מתכנסת. יהי $\varepsilon>0$. קיים $n_0$ טבעי כך ש $\varepsilon>\frac{1}{2\cdot 3^{n_0}}$. כעת לכל $n\ge n_0$ ולכל $k$ טבעי מתקיים:

$$\left|a_{n+k}-a_n\right|=\frac{1}{3^{n+1}+n+1}+\frac{1}{3^{n+2}+n+2}+\cdots+\frac{1}{3^{n+k}+n+k}\le$$

$$\frac{1}{3^{n+1}}+\frac{1}{3^{n+2}}+\cdots+\frac{1}{3^{n+k}}=\frac{1}{3^{n+1}}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k}{1-\frac{1}{3}}=$$

$$=\frac{1}{2\cdot 3^n}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right)\le\frac{1}{2\cdot 3^n}\le\frac{1}{2\cdot 3^{n_0}}<\varepsilon$$

## שאלה 7

תהי $\{a_n\}$ סדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=a_n+(-1)^n\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right)$ ו- $a_1=13$. הוכיחו כי הסדרה מתכנסת.

## פתרון

$$\left|a_m-a_n\right|=\left|a_m-a_{m-1}+a_{m-1}-a_{m-2}+a_{m-2}-\ldots-a_{n+1}+a_{n+1}-a_n\right|\le\left|a_m-a_{m-1}\right|+\ldots+\left|a_{n+1}-a_n\right|=$$

$$\left|(-1)^{m-1}\left[\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}\right]\right|+\ldots+\left|(-1)^n\left[\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\right]\right|=\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}(m-1)!}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n n!}\le$$

$$\le\frac{1}{2^{m-1}}+\frac{1}{2^{m-1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^m}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1}{2^{m-n-1}}+\ldots+1\right]=\frac{1}{2^{n+1}}\left[\frac{1-\frac{1}{2^{m-n}}}{1-\frac{1}{2}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^m}\le\frac{1}{2^n}\to 0$$

לכן זו סדרת קושי ולכן היא מתכנסת (ללא תלות באיבר הראשון כלל).

## שאלת בונוס

תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה. נניח שמתקיים $\lim_{n\to\infty}\left(a_{n+1}-a_n\right)=0$. הוכיחו שקבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה היא קטע או נקודה.

## פתרון

עפ"י הנתון קיים $M>0$ כך ש $\forall n\in\mathbb{N}\quad M\ge a_n\ge -M$. מכאן $M\ge\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\ge\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n\ge -M$ (מדוע?). אם $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$ אז הסדרה מתכנסת ויש לה רק גבול חלקי יחיד ולכן אוסף הגבולות החלקיים הוא נקודה. נניח כעת ש $\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n>\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n$. נוכיח שאוסף הגבולות החלקיים הוא בדיוק הקטע $\left[\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\right]$, כלומר שכל $x\in\left[\underline{\lim_{n\to\infty}}a_n,\overline{\lim_{n\to\infty}}a_n\right]$ הוא גבול חלקי. נניח בשלילה שקיים

$x\in\left[\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n,\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n\right]$ שאינו גבול חלקי של $\{a_n\}$. לכן קיים $\varepsilon>0$ וקיים $k\in\mathbb{N}$ כך שלכל $m\geq k$ $\left[\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n,\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n\right]\supseteq(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\not\ni a_m$. מכיון ש $\overline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ גבול חלקי אזי ב-$[x+\varepsilon,\infty)$ אינסוף מאיברי הסדרה, ובפרט לכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_1>\max\{k,n\}$ כך ש $a_{n_1}\in[x+\varepsilon,\infty)$. מכיון ש $\underline{\lim}_{n\to\infty}a_n$ גבול חלקי אז $j=\min\{t>n_1:a_t\in(-\infty,x-\varepsilon]\}$ מוגדר היטב. מהגדרת $j$ ידוע ש- $a_{j-1}\notin(-\infty,x-\varepsilon]$. לכן בהכרח (מדוע?) $a_{j-1}\in[x+\varepsilon,\infty)$. נקבל ש $|a_j-a_{j-1}|\geq 2\varepsilon$.

מהנ"ל ניתן להסיק שעבור $\varepsilon'=2\varepsilon$ ולכל $n\in\mathbb{N}$ קיים $n_0>n$ כך ש-$|a_{n+1}-a_n|\geq 2\varepsilon$. לכן, $a_{n+1}-a_n$ אינה מתכנסת לאפס בסתירה לנתון.