אוניברסיטת בר-אילן מבחן בקורס: אלגברה מופשטת 1 מספר הקורס: 8821101
המרצה: מיכאל מגרל המתרגל: תומר באואר
מועד א', תשע"ו 18.02.16
משך המבחן: 3 שעות חומר עזר: אין

סמנו באופן ברור בראש כל עמוד באיזו שאלה הוא מתייחס. אל תפתרו סעיפים משאלות שונות באותו עמוד. בנוסף יש גם שאלת בונוס השווה 5 נקודות.

התשובות הן מקוצרות, ולא מהוות פתרון שבהכרח יקבל ניקוד מלא:

1. *בשאלה זו ענו על **ארבעה** מששת הסעיפים.*

א. נסחו והוכיחו את משפט Cayley.
תשובה: משפט מההרצאות.

ב. בחבורה הדיהדרלית D_n, תארו את המרכז $Z(D_n)$.
תשובה: $Z(D_n)=\begin{cases}\{e\} & if\ n=2k+1\\ \{e,\sigma^{\frac{n}{2}}\} & \text{if n}=2\text{k}\end{cases}$, הופיע פתרון בתרגיל בית.

ג. תארו את שתי החבורות $Aut(U_{10})$ ו- $Aut(U_8)$.
תשובה: אפשר לחשב כי $U_{10}\cong\mathbb{Z}_4$, ולכן $Aut(U_{10})\cong\text{Aut}(\mathbb{Z}_4)\simeq\mathbb{Z}_2$.
כעת נשים לב כי $U_8\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2=\{e,a,b,c\}$.
קל לבדוק שכל תמורה של הקבוצה $\{a,b,c\}$ מגדירה חד-משמעית אוטומורפיזם של $\{e,a,b,c\}$ וגם להפך (זו חבורת קליין). $Aut(\mathbb{Z}_2{}^2)\cong GL_2(\mathbb{Z}_2)$ ובדיקה יותר מעמיקה מראה ש $Aut(\mathbb{Z}_2{}^2)\cong GL_2(\mathbb{Z}_2)\cong S_3$.

ד. הוכיחו שהחבורה $GL_n(\mathbb{C})$ היא מכפלה ישרה למחצה של שתי תת-חבורות, שאחת מהן היא $SL_n(\mathbb{C})$.
תשובה: נגדיר $H:=\{\text{diag}(c,1,\ldots,1):c\in\mathbb{C}^*\}$ (מטריצות אלכסוניות, שאיברי האלכסון הם 1, פרט לאיבר בפינה השמאלית העליונה). אז $GL_n(\mathbb{C})$ היא מכפלה ישרה למחצה של שתי תת-חבורות, שאחת מהן היא $SL_n(\mathbb{C})$ והשנייה H.

ה. מצאו מונומורפיזם מפורש $\mathbb{Z}_{10}\times C_{15}\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.
תשובה:
$f:\mathbb{Z}_{10}\times C_{15}\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2,\quad ([k],\sigma^i)\mapsto(\frac{k}{10},\frac{i}{15})+\mathbb{Z}^2$.

ו. נסמן ב $t(G)$ את אוסף האברים מסדר סופי בחבורה G (שהיא לא בהכרח אבלית). הראו שאם $t(G)$ תת-חבורה, אז היא נורמלית. הסבירו מדוע $t(G)$ תת-חבורה אם G אבלית. הוכיחו שבחבורת המנה $G/t(G)$ אין איברים מסדר סופי פרט לאיבר היחידה.

תשובה:נורמליות נוכיח לפי

$\forall a \in t(G) \quad o(gag^{-1}) = o(a) < \infty$, לכן אם $t(G) \le G$ אז $t(G) \lhd G$.

אם G אבלית אז $\forall a,b \in t(G) \quad o(ab^{-1}) \le [o(a), \mathrm{o(b)}] < \infty$. לכן $t(G) \le G$.

בחבורת מנה $G/t(G)$ מתקיים $t(G/t(G)) = \{\mathrm{e}\}$ כי אם $o(\mathrm{x}\,t(G)) < \infty$ ב $G/t(G)$ אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש $(\mathrm{x}\,t(G))^n = x^n t(G) = t(G)$. לכן $x^n \in t(G)$. מכאן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש $(x^n)^k = x^{kn} = e$. זה אומר ש $x \in t(G)$ ולכן $xt(G) = \mathrm{t(G)} = \mathrm{e}_{G/t(G)}$.

2. א. כמה חבורות אבליות G קיימות בגודל 2016 ? כמה מהן בעלות תת-חבורות 3-סילו לא ציקלית כך שהאקספוננט מקיים $100 < \exp(G) < 200$?

תשובה: $|G| = 2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

קיימות $\rho(5) \cdot \rho(1) \cdot \rho(2) = 7 \cdot 1 \cdot 2 = 14$ חבורות אבליות בגודל 2016.

מתוך 14 רק 2 מקיימת $100 < \exp(G) < 200$

והן (עד כדי איזומורפיזם) :

$C_{2^2} \times C_{2^3} \times C_3 \times C_3 \times C_7$ עם $\exp(G) = 168$.

$C_2 \times C_2 \times C_{2^3} \times C_3 \times C_3 \times C_7$ עם $\exp(G) = 168$.

ב. הוכיחו: $G/Z(G) \cong Inn(G)$. תנו דוגמה שבה $G \cong Inn(G)$.

תשובה: נגדיר אפימורפיזם

$$f : G \to Inn(G),\ g \mapsto \alpha_g \quad \alpha_g(x) = gxg^{-1}$$

אז $\ker(f) = Z(G)$. משפאט האיזומורפיזם הראשון משלים את ההוכחה.

באשר הדוגמה אפשר לקחת למשל $G := S_3$.

בעצם בניסוח כזה מתאים גם חבורה טריוויאלית $G := \{e\}$

(היה עדיף להוסיף בניסוח "לא טריוויאלית") .

3. א. הוכיחו: כל פעולה טרנזיטיבית $G\times X\to X$ היא איזומורפית לפעולה מהצורה $gxH \mapsfrom (g,xH) \quad G\times G/H\to G/H$.

תשובה: משפט מההרצאות.

ב. לתכשיט בצורת מגן-דוד יש ששה משולשים בקצוות. ניתן לצבוע כל משולש באחד משני צבעים: כחול ולבן. כמה תכשיטים שונים, עד כדי סיבובים, אפשר לייצר ?

תשובה: נגדיר פעולה טבעית

(שימו לב שפעולה טבעית כאן היא ימנית $X\times G\to X$ המושרת מפעולה שמאלית של G על $\mathrm{Y}:=\{1,2,3,4,5,6\}$).

של חבורת סיבובים $G:=C_6$ על מרחב צביעות $X:=\{\mathrm{f}:\mathrm{Y}=\{1,2,3,4,5,6\}\to\{B,W\}\}$.

$G:=C_6=<a>$

אברים ב $g\in G:=C_6=<a>$	מספר נקודות שבת לוקליות $\|X_g\|$
a פועל על Y כתמורה (123456)	2^1
a^2 כתמורה $(135)(246)$	2^2
a^3 כתמורה $(14)(25)(36)$	2^3
a^4 כתמורה $(153)(264)$	2^2
a^5 כתמורה (654321)	2^1
$a^6=e$ כתמורה $(1)(2)(3)(4)(5)(6)$	2^6

ע"פ משפט Burnside מספר מסלולים ב X שווה $k=\frac{1}{6}\cdot(2^1+2^2+2^3+2^2+2^1+2^6)=14$.

4. א. נסחו והוכיחו את משפט Sylow 1.

תשובה: משפט מההרצאות.

ב. תהי G חבורה מסדר 175. הוכיחו: G לא פשוטה, פתירה ומכילה תת-חבורה ציקלית מסדר 35.

תשובה: $|G|=175=5^2\cdot 7$

בעזרת משפט Sylow 3 קל לבדוק ש ת"ח סילו P,Q עם $|P|=7, |Q|=25$ הן ת"ח נורמליות ב G. כבר ברור ש G לא פשוטה.
בסדרה נורמלית $G \triangleright Q \triangleright \{e\}$
יש גורמים אבליים כי $|Q/\{e\}|=25=5^2$ $|G/Q|=7$.
לכן G פתירה.
בחבורת-5 Q יש ת"ח K בעלת סדר 5 (משפט יסודי על חבורות p).
נגדיר $H:=PK$. אז $H \le G$ כי $P \lhd G$.
כוון ש $(7,5)=1$ ממשפט Lagrange נובע $P \cap K=\{e\}$.
אז מספר אברים ב $H:=PK$ שווה ל 35
(כי אם $x_1,x_2 \in P,\ y_1,y_2 \in K$, $\quad x_1y_1=x_2y_2$ אז $x_2^{-1}x_1=y_2y_1^{-1} \in P\cap K=\{e\}$).
בעזרת משפט Sylow 3 קל לבדוק ש ת"ח סילו K עם $|K|=5$ היא ת"ח נורמלית ב H.
ע"פ משפט הפירוק $H \cong P\times K$.
זאת מכפלה של שתי ת"ח ציקליות בעלות סדר זר. לכן H ציקלית.

* (שאלת בונוס ,חמש נקודות)
תנו דוגמא לחבורה פתירה ,לא נילפוטנטית ,מסדר 2016 .
תשובה: דרך א

קודם כל נעיר שזה נכון עבור D_3. השתמש בחישוב הבא

$$[\tau,\sigma^2]=\tau\sigma^2\tau^{-1}\sigma^{-2}=\tau\tau\sigma^{-2}\sigma^{-2}=\sigma^{-4}=\sigma^2$$

מכאן נובע ש $\sigma^2 \in G_1:=[G,G],\ \sigma^2 \in G_2:=[G,[G,G]], \sigma^2 \in G_3:=[G,[G,[G,G]]],\cdots$

לכן $\forall n \in \mathbb{N} \quad \sigma^2 \in G_n \ne \{e\}$. לסיכום D_3 לא נילפוטנטי.

יחד עם זאת D_n פתירה כי $D_n' \le C_n$ ואז $D_n''=\{e\}$.

נגדיר $G:=D_3\times\mathbb{Z}_{336}$ ונעיר שנילפוטנטיות ופתירות נשמרת

לגבי ת"ח ומכפלות. נקבל $G:=D_3\times\mathbb{Z}_{336}$ חבורה (בגודל 2016) פתירה ולא נילפוטנטית.

דרך ב

$G:=D_{1008}$ פתירה אבל לא נילפוטנטית (בגודל 2016).

שימו לב שמתקיים

$$[\tau,\sigma^{\frac{n}{3}}]=\tau\sigma^{\frac{n}{3}}\tau^{-1}\sigma^{-\frac{n}{3}}=\tau\tau\sigma^{-\frac{n}{3}}\sigma^{-\frac{n}{3}}=\sigma^{-\frac{2n}{3}}=\sigma^{\frac{n}{3}}$$

$$\sigma^{\frac{n}{3}} \in G_1:=[G,G],\ \sigma^{\frac{n}{3}} \in G_2:=[G,[G,G]], \sigma^{\frac{n}{3}} \in G_3:=[G,[G,[G,G]]],\cdots$$

נשתמש במקרה פרטי של $n=1008$.