פיתרון לתרגיל מספר 8 :

תשובה 1:

יהיו $H,K < G$ חבורות סופיות. נגדיר העתקה $H \times K \to HK$ ע"י $(h,k) \mapsto hk$.
יהי $(h,k) \in H \times K$ כך ש $hk = g$ אזי לכל $a \in H \cap K$, $(ha, a^{-1}k) \in H \times K$ מקיים $(ha)(a^{-1}k) = hk = g$
בכיוון ההפוך, אם $(h_1,k_1) \in H \times K$ מקיים $h_1k_1 = g = hk$ אזי $a := h^{-1}h_1 = kk_1^{-1} \in H \cap K$
ו- $h_1 = ha$, $k_1 = a^{-1}k$. לכן לכל $g \in HK$ קיימים $|H \cap K|$ זוגות $(h,k) \in H \times K$ כך ש $hk = g$
מכאן ש $|\mathrm{HK}| = \frac{|H\times K|}{|H\cap K|}$

תשובה 2:

יהיו G קומוטטיבית ו- G/H ציקלית אינסופית. יהי Ha יוצר של G/H ותהי $K = \langle a \rangle$ תת החבורה ב G הנוצרת ע"י a .
תהי $g \in G$ אזי מאחר ש $Hg \in \langle Ha \rangle$ קיים n שלם כך ש $Hg = (Ha)^n = Ha^n$. אי לכך קיים $h \in H$
כך ש $g = ha^n$ לכן $G \subseteq HK$ ומכאן ש $G = HK$. אם $a^m \in H \cap K$ כאשר $m \neq 0$ אזי $(Ha)^m = Ha^m = H$ וזאת
בסתירה לכך ש $G/H = \langle Ha \rangle$ היא ציקלית אינסופית . לכן $H \cap K = \{1\}$. מכאן מאחר ש G קומוטטיבית נובע ש G מכפלה
ישרה פנימית של H ו- K.

תשובה 3:

תהי $G = H \times K$ באשר H ציקלית מסדר p^2 ו- K ציקלית מסדר p^3. איבר $(h,k) \in H \times K$ הוא מסדר p^2 אם ורק אם
$(h^p,k^p),(h,k) \neq (1,1)$ ו- $(h^{p^2},k^{p^2}) = (1,1)$, לכן (h,k) הוא מסדר p^2 אם ורק אם $|h| = p^2, |k| \le p^2$ או
$|h| < p^2, |k| = p^2$. מאחר ש H ציקלית מסדר p^2 יש לה רק תת חבורה אחת מסדר p ולכן יש בה p איברים מסדר קטן אוו שווה
ל- p ו- $p^2 - p$ איברים מסדר p^2. בדומה, מאחר ש K ציקלית מסדר p^3, יש לה רק תת חבורה אחת מסדר p ורק תת חבורה אחת
מסדר p^2 ולכן יש בה p^2 איברים מסדר קטן או שווה ל p^2 ו $p^2 - p$ איברים מסדר p^2. מכאן שמספר האיברים ב G מסדר p^2 הוא

זהו גם מספר האיברים מסדר p^2 בכל תת החבורות של G שהן ציקליות מסדר p^2. בכל תת חבורה מסדר p^2 יש $p^2 - p$
איברים מסדר p^2 וחיתוך של שתיים כאלו (שונות כמובן) הוא תת חבורה מסדר קטן או שווה ל p (מכאן שבחיתוך אין איברים מסדר
p^2) לכן ל – G יש $\frac{(p^2-p)(p^2+p)}{(p^2-p)} = p^2 + p$ תת חבורות ציקליות מסדר p^2.

תשובה 4:

יהי p ראשוני. נוכיח באינדוקציה על n שאם G היא חבורה מסדר p^n אז קיימות לה תת חבורות $G_1, \ldots, G_{n-1}$
כך ש $G_1 < G_2 < \ldots < G_{n-1}$, G_i תת חבורה נורמלית של G ו $|G_i| = p^i$ עבור $i = 1, \ldots, n-1$.
לפי נוסחאת המחלקה מקבלים שבהכרח $Z(G) \neq \{1\}$ ולכן יש במרכז איבר a מסדר p . נסמן $G_1 = \langle a \rangle$ אזי $|G_1| = p$.
עתה, מאחר ש $G_1 < Z(G)$ מתקיים שלכל $g \in G$ $gG_1 = G_1g$ לכן G_1 נורמלית ב-G .
נתבונן עתה בחבורת המנה G/G_1 , לפי לגרנז $|G/G_1| = \frac{p^n}{p} = p^{n-1}$ לכן עפ"י הנחת האינדוקציה ל- G/G_1 יש תת חבורות
$G_2/G_1, \ldots, G_{n-1}/G_1$ כך ש $G_2/G_1 < \ldots < G_{n-1}/G_1$ באשר G_i/G_1 תת חבורה נורמלית של G/G_1 , $|G_i/G_1| = p^{i-1}$.
מכאן $G_1, \ldots, G_{n-1}$ הן תת חבורות של G המקיימות $G_i < G_{i+1}$, G_i נורמלית ב – G ו- $|G_i| = p^i$.
המעבר האחרון נעשה עפ"י ההתאמה הבאה שראינו בתרגיל : אם $L < G/K$ אזי $H = \{g \in G | Ka \in L\}$ היא תת חבורה של G
המקיימת $\mathrm{L} = \mathrm{H}/K$ ואם בנוסף מתקיים ש L נורמלית ב G/K אז H נורמלית ב G .

תשובה 5:

א) קל ונובע מההגדרה.
ב) ברור ש- H מוכל במנרמל שלו. צ"ל שלכל $a\in N(H)$ מתקיים: $aH=Ha$ אבל זה נכון על פי הגדרת המנרמל.
ג) אם H תח"נ של K אז לכל $k\in K$: $kH=Hk$ ולכן K מוכל ב- N(H). K היא חבורה בפני עצמה, ולכן היא ת"ח של N(H).

ד) (1) ההוכחה ש-H היא ת"ח קלה. מכיוון שהיא לא משפיעה על 2,4,6 ניתן להסתכל עליה כעל חבורות התמורות של {1,3,5} ולכן היא איזומורפית ל- S3. היא לא נורמלית ב- S6: התמורה $(1\ 3\ 5)\in H$ אך התמורה הצמודה לה: (1 2 4) אינה שייכת ל-H (זכרו שת"ח היא נורמלית בחבורת התמורות אם היא מכילה את כל התמורות בעלות אותו מבנה).

(2) ת"ח אחת ב- N(H) האיזומורפית ל- S3 היא H עצמה (ע"פ סעיף ב)).
נסתכל על $M = \{\sigma\in S6 : \sigma(1) = 1, \sigma(3) = 3, \sigma(5) = 5\}$. אזי $M\cap H = \{e\}$ ו-M איזומורפית ל- S3. מכיוון שכל תמורה ב-M (חוץ מה- id) זרה לכל תמורה ב-H אז לכל $m\in M$ מתקיים $mH=Hm$ ולכן M מוכל במנרמל של N(H).

תשובה 6:

המטריצה $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ יוצרת את תת החבורה $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbb{Z}_5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ והיא כמובן מסדר 5.

המטריצה $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ יוצרת את תת החבורה $\begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z}_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ והיא מסדר 5.

נשים לב ש- G היא חבורה לא אבלית מסדר 53 וניתן להוכיח ש- $|Z(G)|=5$ (מנוסחאת המחלקה נובע ש $|Z(G)|\neq 1$)
כמו כן, אם $|Z(G)| = 5^2$ נקבל ש G אבלית כי מרחב המנה G/Z(G) הוא ציקלי)

המטריצה $z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ יוצרת את תת החבורה, היא מסדר 5 והיא יוצרת המרכז $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbb{Z}_5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

רואים בקלות שכ"א מהאיברים פורש את הכניסה המתאימה לו המטריצה ו-

$$z^{k1}x^{k2}y^{k3} = \begin{pmatrix} 1 & k3 & k1 \\ 0 & 1 & k2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{כאשר} \quad k1, k2, k3 \in \mathbb{Z}_5$$

תשובה 7:

א) $H = \{1, \tau\sigma, \sigma^2, \tau\sigma^3\}$, $K = \{1, \tau\sigma\}$ מקיימות ש H ת"ח נורמלית ב-D4, K ת"ח נורמלית ב-H כי $[D_4 : H] = [H : K] = 2$,
אבל K אינה נורמלית ב D_4 שכן $\tau(\tau\sigma)\tau^{-1} = \tau^2\sigma\tau = \sigma\tau \notin K$.

תשובה 8:

$Z(N)$ היא ת"ח של N ולכן ת"ח של G. יהי $g\in G$, $z\in Z(N)$. צ"ל $gzg^{-1}\in Z(N)$. ז"א, עבור $n\in N$ כלשהו, צריך להוכיח ש- $gzg^{-1} * n = n * gzg^{-1}$.

נשים לב ש- $gzg^{-1}\in gNg^{-1} = N$.

עתה – $gzg^{-1} * n = g\left(z * g^{(-1)}ng\right)g^{-1} = g(g^{-1}ng * z)g^{-1} = n * (gzg^{-1})$

תשובה 9:

א) לא נכון. תהי $G=D4$, $A = \langle\sigma\rangle$, $B=Z(D4)$. אז A איזומורפית ל- Z4 ו- G/A איזומרפית ל-Z2 (כי זו חבורה מסדר 2). B איזומורפית ל- Z2 ו- G/B איזמורפית ל- $Z2\times Z2$.

ב) נכון. נתון $x = gyg^{-1}$. רעיון ההוכחה הוא שאם $x^n=1$ אז $(gyg^{-1})^n = gy^ng^{-1} = 1$ או $y^n=1$ וההפך.

ג) לא נכון. ב- Z4 לאיברים 1,3 יש אותו סדר (שניהם יוצרים) אבל הם אינם צמודים (כי Z4 אבלית).

ד) לא נכון. נשים לב שאם $x \in N(H)$ אז x לא בהכרח $x\in H$. למשל, עבור $H=\langle(1\ 2)\rangle$ ב- S5 , אז $x = (3\ 4\ 5)\in N(H)$ (למה?) ו- $|H|=2$, $|x|=3$.

ה) חס וחלילה . ל A4 יש שמונה איברים מסדר 3 ושלושה מסדר 2 ואילו ב D6 יש איבר מסדר 6 (סיבוב).