

מבוא להסתברות וסטטיסטיקה

תרגיל 3:

הגשה תוך שבועיים בתרגול לידי המתרגל בלבד. (20.3 ו- 22.3 לפי המתרגל)

שאלה 1:

תהי $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$

א. האם קיימות שלוש קבוצות חלקיות A, B, C של Ω , כך שמתקיים $|A| = |B| = |C| = 2$ ומתקיים ששלושת הקבוצות A, B, C הן זרות בזוגות?

ב. האם קיימות שלוש קבוצות חלקיות A, B, C של Ω , כך שמתקיים $|A| = |B| = |C| = 2$ ומתקיים $A \cap B \cap C = \phi$?

שאלה 2:

בנווה חמציצים ישנם 2 אירועים בלבד שיכולים לגרום לדשא להרטב. 1. הממטרה פועלת, 2. יורד גשם. נניח שלגשם יש השפעה ישירה על פעולת הממטרה – כשיורד גשם, הממטרה כמעט לעולם אינה פועלת. הגשם רטוב כעת, מהי ההסתברות שיורד גשם בהינתן הנתונים הבאים:

יורד גשם	לא יורד גשם
0.8	0.2

ממטרה פועלת	ממטרה לא פועלת	
0.4	0.6	לא יורד גשם
0.01	0.99	יורד גשם

לדוגמא, בהינתן שיורד גשם אזי יש הסתברות של 0.4 שהממטרה פועלת והסתברות של 0.6 שהממטרה אינה פועלת.

הדשא רטוב	הדשא אינו רטוב	
0.99	0.01	ממטרה פועלת ויורד גשם
0.9	0.1	ממטרה פועלת ולא יורד גשם
0.8	0.2	ממטרה לא פועלת ויורד גשם
0	1	ממטרה לא פועלת ולא יורד גשם

לדוגמא, בהינתן שהממטרה פועלת ויורד גשם אזי הדשא רטוב בהסתברות של 0.99 (99%) ואינו רטוב בהסתברות של 0.01 (1%).

שאלה 3:

1. יהיו A ו- B מאורעות בלתי תלויים. הוכיחו או הפריכו:

- א. A^C ו- B בלתי תלויים.
ב. A^C ו- B^C בלתי תלויים.

2. בהטלת קוביות מאוזנות נגדיר את המאורעות הבאים:

- A : בקובייה האדומה התקבל 1 או 2. B : בקובייה הכחולה התקבל 3 או 4 או 5.
 C : סכום התוצאות בשתי הקוביות הוא 4 או 11 או 12.

האם המאורעות A, B ו- C תלויים או בלתי תלויים?

שאלה 4:

הוכיחו או הפריכו את כל אחת מהטענות הבאות. במקרה שמפריכים יש לעשות זאת על-ידי מתן דוגמא מפריכה פשוטה.

א. $(A \cup B) \setminus C = A \cup (B \setminus C)$.
ב. $A \cap B \cap C = A \cap B \cap (C \cup B)$.

ג. $(A \cup B) \setminus A = B$.
ד. $(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C) \subset A \cup B \cup C$.

שאלה 5:

בבנין בן 5 קומות יש מעלית. 3 סטודנטים נכנסים יחד למעלית בקומת הכניסה ובוחרים לאן הם עולים. רשמו את סבלת ההסתברות עבור הקומה הגבוהה ביותר שבה תצזור (דהיינו מהי ההסתברות שהקומה הגבוהה ביותר היא 1, דהיינו מהי ההסתברות שהקומה הגבוהה ביותר היא 2 וכך הלאה).

שאלה 6:

יוסי שם n סוגים שונים של גבינות בשורה בצורה אקראית כך שבין כל שתי גבינות יש רווח. לאחר מכן הוא מניח מלפפון חמוץ באחד מ- $(n-1)$ הרווחים בין הגבינות בצורה אקראית. מה הסיכוי שגבינת העיזים והצפתית (2 מ- n סוגי הגבינות) יהיו בצדדים שונים של המלפפון החמוץ? השתמשו בנוסחאת ההסתברות השלמה.

שאלה 7:

סיגל מעתוק מקבלת מאביה מתנה לחתונה. הוא מציג לה שתי קופסאות זהות: באחת שני יהלומים יקרים ואבן אחת פשוטה, השניה עם שתי אבנים פשוטות ויהלום יקר אחד. סיגל איננה יודעת מה נמצא באיזו קופסה. למען ההגינות, מרשה האב לבתו להוציא אבן אחת מקופסה שנבחרה על ידה באקראי, ואז להחליט אם להשאיר בידה אותה קופסה או לקחת את השניה (אחרי שהחזירה את האבן שבחרה לקופסה שלה). סיגל נוקטת במדיניות הבאה: אם האבן שהוציאה היא יהלום, היא משאירה את הקופסה, אחרת מחליפה אותה. מה הסיכוי שרובי תקבל 2 יהלומים כמתנת חתונה? פיתרו בעזרת עץ הסתברויות.

שאלה 8:

בבית המשפט המחוזי בתל אביב עתרו אירגוני זכויות הנשים כנגד אוניברסיטת בר-אילן. ארגוני הזכויות הציגו נתוני קבלה לשנת הלימודי המראים שאחוזי הקבלה של נשים לאוניברסיטה קטנים בעשרות אחוזים מאלו של גברים. אי לכך טענו, שהאוניברסיטה מפלה לרעה נשים. מטעם ההגנה טענו נציגי האוניברסיטה שהדבר משולל יסוד. הם הציגו נתונים המראים בבירור שלכל מחלקה באוניברסיטה אחוז קבלה של נשים מסך כל הנשים שהגישו מועמדות לקבלה לפקולטה היו גבוהים משמעותית מאלו של הגברים. ידוע ששני הצדדים הציגו נתוני אמת. האם יתכן הדבר? ואם כן, כיצד הדבר יתכן? נמקו והביאו דוגמא פשוטה הממחישה את טענתכם.

