תרגיל 4 – אלגברה ליניארית 2

תרגיל 1

נתון שלהעתקה ליניארית $T: C^3 \to C^3$ יש פולינום אופייני $f_T(x) = x^3 + x$.

א. חשב את הערכים העצמיים של T.
ב. האם T ניתנת ללכסון? כן, לא, לא ניתן לדעת. הוכח את תשובתך.
ג. האם T ניתנת למישלוש? כן, לא, לא ניתן לדעת. הוכח את תשובתך.

תרגיל 2

תן דוגמא למטריצה מהצורה $\begin{pmatrix} a & a \\ b & -1 \end{pmatrix}$, $a, b \neq 0$, כך שהפולינום המינימאלי שלה הוא $m(x) = x$ ומצא את הפולינום האופייני שלה.

תרגיל 3

מצא מטריצה משולשית הדומה למטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

תרגיל 4

תהיי $T: R^2 \to R^2$ העתקה ליניארית המוגדרת ע"י $T((x,y)) = (y,x)$.

קבע עבור כל אחד מהתת מרחבים הבאים אם הוא T - אינווריאנטי. נמק את תשובתך.

א. $span\{(1,0)\}$.
ב. $span\{(0,1)\}$.
ג. $span\{(1,1)\}$.

תרגיל 5

יהי V מרחב וקטורי מעל שדה F, ויהי $W \subseteq V$ תת מרחב T אינווריאנטי.

נניח ש g, f פולינומים.

א. הוכח ש W תת מרחב $g(T)$ אינווריאנטי.
ב. הוכח ש $f(T)[W]$ תת מרחב $g(T)$ אינווריאנטי.
ג. הוכח שאם $V = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_r$ כאשר לכל $1 \leq i \leq r$ W_i תתי מרחבים T אינו וריאנטים, אזי $f(T)[V] = f(T)[W_1] \oplus f(T)[W_2] \oplus \ldots \oplus f(T)[W_r]$

תרגיל 6

יהי $V = P_2[R]$ (ז"א מרחבה הפולינומים מעל R ממעלה קטנה או שווה ל 2) ותהיי $T: V \to V$ המוגדרת ע"י $T(p(x)) = p(x) + (x+1)p'(x) - x^2 p''(x)$ כאשר $p'(x)$ היא הנגזרת הראשונה של $p(x)$ ו $p''(x)$ הנגזרת השנייה של $p(x)$.

א. חשבו את המטריצה המייצגת את T ביחס לבסיס $\{1, x, x^2\}$.
ב. חשבו את הערכים העצמיים והוקטורים העצמיים של T.
ג. חשבו את הפולינום המינימאלי של T.