הרצאה 13

$$f \in C^{r+1}(U)$$

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a) h^\alpha + \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a+\theta h) h^\alpha$$

$$f(x) = \sum_{|\alpha| \le r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(a)(x-a)^\alpha + \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^\alpha$$

$$r = 0$$

$$f(x) = f(a) + df_{a+\theta h}(h)$$

$$df_{a+\theta h}(h) = \langle \nabla f(a+\theta h), h \rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+\theta h) h_j$$

מסקנה – משפט על ערך ממוצע

$$f \in C^1(U)$$

$$\boxed{f(x) - f(a) = \langle \nabla f\big(a+\theta(x-a)\big), x-a \rangle}$$

משפט על ערך ממוצע.

מסקנה

אם $\|\nabla f(z)\| \le M$ אזי $\boxed{|f(x)-f(a)| \le \mathrm{M}\|x-a\|}$

אומדן שארית בנוסחת טיילור

הגדרה

קבוצה $U \subset \mathbb{R}^n$ קמורה אם $\forall x, a \in U : [x,a] \subset U$

$$[x,a] \coloneqq \{a+\theta(x-a) : 0 \le \theta \le 1\}$$

משפט

תהי $f \in C^{r+1}(U), U \subset_\circ \mathbb{R}^n$. נניח שלכל α, $|\alpha| = r+1$; $\forall z \in U$: $|D^\alpha f(z)| \le M$, אזי:

$$a \in U \; \boxed{|R_r f(a, x-a)| \le \frac{M}{(r+1)!}\left(\sqrt{n}\right)^{r+1} \|x-a\|_2^{r+1}}$$

הוכחה

$$R_r f(a, x-a) = \sum_{|\alpha| = r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)(x-a)^\alpha$$

$$|R_r f(a,x-a)| \le \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} \left|D^\alpha f\big(a+\theta(x-a)\big)\right| |(x-a)^\alpha| \le M \sum \frac{1}{\alpha!} |x_1-a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n-a_n|^{\alpha_n}$$

$$= \frac{M}{(r+1)!} \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{(r+1)!}{\alpha!} |x_1-a_1|^{\alpha_1} \dots |x_n-a_n|^{\alpha_n} \underbrace{=}_{\text{בינום של ניוטון}}$$

$$= \frac{M}{(r+1)!}\left(|x_1-a_1|^{\alpha_1}\dots|x_n-a_n|^{\alpha_n}\right)^{r+1} = \frac{M}{(r+1)!}\left|\left|x-a\right|\right|_1^{r+1}$$

$$\left|\left|x-a\right|\right|_1 \le \sqrt{n}\left|\left|x-a\right|\right|_2$$

נוסחת טיילור עם שארית בצורה Peano

משפט

$$U \subset_\circ \mathbb{R}^n \,; f: U \to \mathbb{R} \,; f \in C^r(U), r \ge 1 \,, a \in U$$

אזי

$$\boxed{f(a+h) = \sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha + o\left(\left|\left|h\right|\right|^r\right)_{h\to 0}}$$

הוכחה

$$f \in C^r(U) = C^{(r-1)+1}(U)$$

לפי נוסחת טיילור עם שארית $Lagrange$:

$$f(a+h) = \sum_{|\alpha|\le r-1}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha + \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a+\theta h)h^\alpha$$

$$= \underbrace{\sum_{|\alpha|\le r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha}_{P_rf(a,h)} + \underbrace{\sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a+\theta h)h^\alpha - \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}D^\alpha f(a)h^\alpha}_{\alpha(h)}$$

$$|\alpha(h)| \le \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}\left(|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|\right)|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{\alpha_n}$$

$$\frac{|\alpha(h)|}{\left|\left|h\right|\right|^r} \le \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}\left(|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|\right)\frac{|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{\alpha_n}}{\left|\left|h\right|\right|_r}$$

$$\left|h_j\right| \le \sqrt{h_1^2+\dots+h_n^2} = \left|\left|h\right|\right|_2 \Rightarrow \left|h_j\right|^{\alpha_j} \le \left|\left|h_j\right|\right|^{\alpha_j}$$

$$|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{\alpha_n} \le \left|\left|h\right|\right|^{\alpha_1+\dots\alpha_n} = ||h|^r$$

$$\frac{|h_1|^{\alpha_1}\dots|h_n|^{\alpha_n}}{\left|\left|h\right|\right|_r} \le 1$$

ולכן

$$\frac{|\alpha(h)|}{\left|\left|h\right|\right|^r} \le \sum_{|\alpha|=r}\frac{1}{\alpha!}|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)|$$

$D^\alpha f(x)$ רציפות ל־$|\alpha| = r$ ולכן $\lim\limits_{h\to 0}|D^\alpha f(a+\theta h) - D^\alpha f(a)| = 0$

ולכן $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\alpha(h)}{\left|\left|h\right|\right|^r} = 0$ ולכן $\alpha(h) = o\left(\left|\left|h\right|\right|^r\right)$

יחידות של פולינום טיילור

משפט

תהי $f \in C^r(U); U \subset\circ \mathbb{R}^n$

נניח כי

$$f(a+h) = P(h) + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$$
$$f(a+h) = \tilde{P}(h) + o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$$

עבור $P, \tilde{P}$ פולינומים, $r \geq \max\{\deg P, \deg \tilde{P}\}$

אזי $P = \tilde{P}$

הוכחה

$$Q(h) \coloneqq P(h) - \tilde{P}(h) = o\left(\left||h|\right|^r\right)_{h\to 0}$$
$$r > \deg Q =: m$$

$$Q(h) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha h^\alpha \qquad q_\alpha \in \mathbb{R}$$

$$Q(h) = o\left(\left||h|\right|^r\right)$$
$$h \hookrightarrow th\,, t \in \mathbb{R}$$

$$Q(th) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha (th)^\alpha = o\left(|t^r|\left||h|\right|^r\right)_{t\to 0}$$

$$(th)^\alpha = (th_1)^{\alpha_1} \dots (th_n)^{\alpha_n} = t^{|\alpha|} h_1^{\alpha_1} \dots h_n^{\alpha_n}$$

$$\Rightarrow Q(th) = \sum_{|\alpha|\leq m} q_\alpha t^{|\alpha|} h^\alpha = \sum_{k=0}^{m} \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha t^{|\alpha|} h^\alpha = \sum_{k=0}^{m} \underbrace{\left(\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha\right)}_{c_k} t^k = \sum_{k=0}^{m} c_k t^k = o(|t|^r)_{t\to 0}\,, r \geq m$$

$$\sum_{k=0}^{m} c_k t^k = o(t^r), r \geq m$$

$$c_0 + c_1 t .. + c_m t^m = o(t^r)$$
$$t \to 0 : c_0 = 0$$

$$c_1 + \dots + c_m^{m-1} = o(t^{r-1})$$
$$t \to 0 : c_1 = 0$$

$$\dots$$

$$c_m = 0$$

$$q(h) = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha = 0 \;\forall k = 0, \dots, m \;\forall h \in \mathbb{R}^n$$

$$\frac{\partial^{|\beta|}}{\partial h_1^{\beta_1} \dots \partial h_n^{\beta_n}} q(h)|_{h=0} = \sum_{|\alpha|=k} q_\alpha D^\beta h^\alpha \,|_{h=0}$$

$$D^\beta h^\alpha = \begin{cases} 0 & \beta \neq \alpha \\ \alpha! & \beta = \alpha \end{cases}$$

וכן אם $q(h) = 0$ נקבל:

$$D^\beta \left(\sum_{|\alpha|=k} q_\alpha h^\alpha \right)|_{h=0} = 0 \Rightarrow q_\alpha \alpha! = 0 \Rightarrow q_\alpha = 0$$

ולכן $Q = P - \tilde{P} = 0$

מסקנה

אם $f \in C^r(U)$ קיים פולינום $P, \deg P \leq r$ כך ש $f(a+h) = P(h) + o\left(\left|\left|h\right|\right|^r\right)_{h\to 0}$ אזי P פולינום טיילור בנקודה a.

דוגמא

$$f(x,y) = \frac{1}{1+2x^2y}$$

$$D^{(10,5)} f(0,0) = ?$$

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{5} (-2x^2y)^k + o\left(\sqrt{x^2+y^2}^{15}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{5} (-2x^2y)^k = \sum_{|\alpha|\leq 15} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha f(0,0) h^\alpha \qquad h = (x,y)$$

$$\alpha = (10,5) \Leftrightarrow k = 5$$

$$-2^5 = \frac{1}{10!\,5!} D^{(10,5)} f(0,0)$$

נוסחת טיילור לפולינומים

משפט

אם P פולינום $\deg P = r$ אזי

$$P(x) = \sum_{|\alpha|\leq r} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha P(a)(x-a)^\alpha$$

הוכחה

$$R_r P(a,h) = \sum_{|\alpha|=r+1} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha p(a+\theta h) h^\alpha = 0$$

$$|\alpha| > r \Rightarrow D^\alpha P \equiv 0$$

תרגיל

$$P(x) = \sum a_{\alpha_1,\dots,\alpha_n} x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n} = \sum_{|\beta|\leq r} c_{\beta_1,\dots,\beta_n} (x_1-a_1)^{\beta_1} \dots (x_n-a_n)^{\beta_n}$$

a מרכז.

תרגיל

$P(x,y,z)=xy+yz,$

$a=(1,2,1) \quad P(x,y,z)=[(x-1)+1][(y-2)+2]+[(y-2)+2][(z-1)+1]$

$=(y-2)(z-1)+2(z-1)+(y-2)+2$