פתרון מבחן תשעז מועד א

29 בינואר 2018

1. משפט מהרצאה
2. משפט מהרצאה
3.

(א) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ נדרג

$$A \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

i. בסיס למרחב השורות הוא $B_R = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (שורות שונות מאפס אחרי דירוג) ו

$\dim R(A) = 2$

בסיס למרחב עמודות הוא $B_C = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ (עמודות הציר במדורגת הן עמודות 1+2

ולכן עמודות 1+2 ב A מהוות בסיס ל $C(A)$)

ii. אם נוסיף את הוקטורים $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ל B_R נקבל בסיס כי $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

קבוצה בת"ל (אם נשים אותם כשורות מטריצה נקבל צורה מדורגת מדרגה 4) עם 4 איברים ולכן לפי השלישי חינם - בסיס.

iii. בעצם צריך למצוא B כך ש $C(A) \subsetneq C(B)$. למשל

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(ב)

i. $Im(T)=\left\{Tv: v\in\mathbb{R}^4\right\}=\left\{Av: v\in\mathbb{R}^4\right\}=C(A)$ ולכן הבסיס הוא B_C משאלה קודמת והמימד הוא 2.

$\ker T=\left\{v\in\mathbb{R}^4: Tv=0\right\}=\left\{v\in\mathbb{R}^4: Av=0\right\}=N(A)$. נציב s,t במשתנים החופשיים $x_3=s, x_4=t$ בצורה המדורגת מסעיף הקודם ונקבל

$$N(A)=\left\{\begin{pmatrix} s-t\\ -s\\ s\\ t\end{pmatrix}: s,t\in\mathbb{R}\right\}=span\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

לכן הבסיס הוא $\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ והמימד הוא 2

ii. T אינה חח"ע כי למשל $T\begin{pmatrix}-1\\0\\0\\1\end{pmatrix}=0=T\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$. T אינה על כי $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\notin C(A)=Im(T)$

4. $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&1&-1\\1&-1&1\end{pmatrix}$.

(א) נתחיל עם הפ"א: לצורך כך נחשב את הדטר' של $\lambda I-A$

$$\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-1\\1&\lambda-1&1\\-1&1&\lambda-1\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-1\\1&\lambda-1&1\\0&\lambda&\lambda\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-1\\\lambda&\lambda&0\\0&\lambda&\lambda\end{pmatrix}\right|$$

$$= \lambda^2\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&1&-1\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right|=\lambda^2\left|\begin{pmatrix}\lambda-1&2&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}\right|$$

$$= \lambda^2\left[(\lambda-1)-2\right]=\lambda^2\left[\lambda-3\right]$$

ולכן הע"ע הם $\lambda_1=0$ ו $\lambda_2=3$. נחשב וע"ע: עבור $\lambda_1=0$ צריך לחשב את מרחב האפס של A. אחרי דירוג נקבל כי

$$A\to\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן המרחב העצמי הוא

$$V_{\lambda=0}=N(A)=\left\{\begin{pmatrix}s-t\\s\\t\end{pmatrix}: s,t\in\mathbb{R}\right\}=spam\left\{v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},v_1=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

עבור $\lambda_2 = 3$ נקבל

$$A-3I=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן

$$V_{\lambda=3} = N(A-3I) = \left\{ \begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} = spam \left\{ v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נפעיל גרם שמידט על הבסיס $\{v_1, v_2\}$ כדי למצוא בסיס או"נ ל $V_{\lambda=0}$

$$\begin{aligned} w_1 &= v_1 \\ w_2 &= v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{-1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ננרמל אותם ונקבל מסיס או"ג ל $V_{\lambda=0}$

$$\left\{ u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

ננרמל את v_3 לקבל בסיס או"נ ל $V_{\lambda=3}$

$$\left\{ u_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

נגדיר $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$. נגדיר $P = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}$ (הו"ע כעמודות) ונקבל ש P או"ג ונקבל:

$$P^t A P = D$$

(ב) לא, יש לה ע"ע 0. נוכל להגידר B למשל להיות

$$B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ u_1 & u_2 & u_1 \\ | & | & | \end{pmatrix}$$

ואז

$$AB = \begin{pmatrix} | & | & | \\ Au_1 & Au_2 & Au_1 \\ | & | & | \end{pmatrix} = 0$$

(ג) כיוון ש A סימטרית נקבל כי $R(A)=C(A)$ ואז

$$C(A)^{\perp}=R(A)^{\perp}=N(A)=span\left\{v_1,v_2\right\}$$

.5

(א) נכון כי במטריצה B

- ניתן לאפס את שורה 4 בעזרת שורה 1
- ניתן לאפס את שורה 5 בעזרת שורה 2
- ניתן לאפס את שורה 6 בעזרת שורה 3

ולקבל אחרי דירוג $B\to\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix}$ ואז

$$rank(B)=rank(\begin{pmatrix}A\\0\end{pmatrix})=rank(A)$$

(ב) לא נכון למשל $A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ מדרגה 1 ואילו

$$C=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

מדרגה 2

(ג) אותה דוגמא מסעיף קודם

(ד) לא נכון. מסעיף א נקבל כי $rank(A)=rank(B)$ ולכן אם סעיף זה נכון צריך להתקיים $rank(C)>2rank(A)$. למטריצה C יש 3 עמודות ולכן $rank(C)\leq 3$ ולכן אם סעיף זה נכון צריך להתקיים כי $rank(A)=1$ואילו $rank(C)=3$. כלומר אחרי דירוג

$$A\to\begin{pmatrix}*&*&*\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}=A'$$

ע"י אותם פעולות נקבל כי

$$C\to\begin{pmatrix}A'\\A^t\end{pmatrix}$$

כיוון שכך נקבל שב A^t יש 2 שורות בת"ל לפחות ולכן $2\leq rank(A^t)=rank(A)$ סתירה.

.6

(א) מחישוב ישיר

$$p_{\alpha A}(x)=|\lambda-\alpha A|=|\alpha\left(\frac{\lambda}{\alpha}-A\right)|=\alpha^n|\frac{\lambda}{\alpha}-A|=\alpha^n p_A(\frac{\lambda}{\alpha})$$

(ב) אם $c=0$ אזי $P^{-1}AP=0$ ואז $A=0$ ואז $A^n=0$ וסיימנו. אחרת $c\neq 0$. כיוון ש A דומה ל cA יש להם אותו פולינום אופיני וביחד עם סעיף קודם נקבל

$$p_A(x)=p_{cA}(x)=c^n p_A(\frac{x}{c})$$

נסמן $p_A(x)=\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i$ כאשר $\alpha_n=1$ (כי פ"א הוא פולינום מתוקן) ונקבל כי

$$p_A(x)=\sum_{i=0}^n \alpha_i x^i=c^n\sum_{i=0}^n \alpha_i\left(\frac{x}{c}\right)^i=c^n p_A(\frac{x}{c})$$

משיוויון זה נקבל כי לכל $0\leq i\leq n$ מתקיים כי

$$\alpha_i=c^n\frac{\alpha_i}{c^i}=c^{n-i}\alpha_i$$

כעת אם קיים $0\leq i\leq n-1$ כך ש $\alpha_i\neq 0$ נקבל ע"י חילוק ב α_i כי $c^{n-i}=1$ וסיימנו.
אחרת לכל $0\leq i\leq n-1$ מתקיים כי $\alpha_i=0$ ואז $p_A(x)=x^n$. ממשפט קיילי המילטון נקבל

$$0=p_A(A)=A^n$$

וסיימנו.