

## אסטרטגיות MaxMin

### הגדרה - אסטרטגיית MaxMin

אסטרטגיית maxmin של שחקן  $i$  היא האסטרטגיה שממקסמת את payoff של  $i$  במקרה הגרוע ביותר (worst case) כאשר כל יתר השחקנים (מסומנים ב- $i$ ) משחקים את האסטרטגיות הגורמות את הנזק הגדול ביותר ל- $i$ .

כלומר: שחקן  $i$  יוצא מתוך נקודת ההנחה שהשחקנים האחרים לא מנסים למקסם את הרווח שלהם עצמם, אלא לפגוע בו.

ערך maxmin (או safety value) של המשחק עבור שחקן  $i$  הוא הערך המובטח על ידי האסטרטגיית maxmin (יכול להיות שהוא יקבל יותר, אם השחקנים האחרים לא ינסו לדפוק אותו). בצורה פורמלית:

the maxmin strategy for player  $i$  is  $\operatorname{argmax}_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_1, s_2)$

the maxmin value for player  $i$  is  $\max_{s_i} \min_{s_{-i}} u_i(s_1, s_2)$

### למה שנרצה להשתמש באסטרטגיית MaxMin

- פראנויה - אנחנו בטוחים שהכל ישתבש
- מזעור סיכונים - זה מבטיח ערך סף מסויים של תמורה
- יריבים לא רציונאליים - אנחנו לא יכולים להניח שהיריב יבחר באופציה מסויימת
- אנחנו לא יודעים את התועלות של השחקנים האחרים

### הגדרה - אסטרטגיית MinMax

אסטרטגיית MinMax של שחקן  $i$  כנגד שחקן  $-i$  (במשחק של שני שחקנים) היא האסטרטגיה הממזערת את payoff הכי טוב שיכול לקבל  $-i$  פורמלית:

the minmax strategy for player  $i$  against player  $-i$  is  $\operatorname{argmin}_{s_i} \max_{s_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$

the minmax value for player  $-i$  is  $\min_{s_i} \max_{s_{-i}} u_{-i}(s_i, s_{-i})$

### למה שנרצה להשתמש באסטרטגיית MaxMin

- כאשר רוצים להעניש את השחקן השני
- במשחק סכום אפס (או סכום קבוע)

## תיאוריית MinMax

בכל משחק סכום אפס סופי עם שני שחקנים, בכל שיווי משקל נאש כל שחקן מקבל תמורה ששווה גם לערך minmax שלו וגם לערך maxmin שלו.

- ערך maxmin של השחקן הראשון נקרא "ערך המשחק" value of the game, והוא הערך שהשחקן הראשון מקבל בכל שיווי משקל נאש.

## איך משתמשים בזה?

למשל במקרה שבו לכל שחקן יש 2 אפשרויות - נסמן ב- $s_1$  את הסיכוי ששחקן 1 יבצע את אחת האפשרויות באסטרטגיה שלו, ואותו דבר עם  $s_2$  ושחקן 2. נחשב תחילה עבור שחקן 1:

$$\max_{s_1} \min_{s_2} [\text{some expression that uses } s_1 \text{ and } s_2]$$

אם נתייחס לאסטרטגיה של השחקן הראשון בתור פרמטר:

$$= \min_{s_2} [\text{the same expression}]$$

ואת זה אפשר לסדר בתור:

$$= \min_{s_2} [(\text{some expression that uses } s_1) s_2 + (\text{some other expression that uses } s_1)]$$

נרשום את זה בתור:

$$\min_{s_2} [f(s_1) s_2 + g(s_1)]$$

אם  $f(s_1) > 0$  שחקן 2 יבחר  $s_2 = 0$  ואם  $f(s_1) < 0$  שחקן 2 יבחר  $s_2 = 1$ . נרצה אדישות - כלומר  $f(s_1) = 0$  (לחלופין אפשר לגזור לפי  $s_2$ )  
עבור שחקן 2, פשוט נחליף את min והmax:

$$\min_{s_2} \max_{s_1} [\text{some expression that uses } s_1 \text{ and } s_2] = \max_{s_1} [\text{the same expression}] = \dots$$

## אפשר גם באמצעות תכנות לינארי:

$$\text{minimize } U_1^*$$

$$\forall_{j \in A_1} \sum_{k \in A_2} = u_1 (a_1^j, a_2^k) \cdot s_2^k \leq U_1^*$$

$$\sum_{k \in A_2} s_2^k = 1$$

$$\forall_{k \in A_2} s_2^k \geq 0$$

## Correlated Equilibrium

correlated equilibrium דומה לרמזור - הוא אומר לצדדים מה לעשות. בצומת לא מרומזר, המשחק הוא:

	Cross	Stop
Cross	-100,-100	1,0
Stop	0,1	0,0

יש שני שיווי משקל נאש -  $(Cross, Stop)$  ו  $(Stop, Cross)$ . אבל אף אחד מהם לא הוגן. שיווי משקל באסטרטגיות מעורבות אמנם יותר הוגן (כי שני הצדדים מקבלים אותו דבר), אבל יש סיכוי לתאונה, ולכן בהסתברות מאוד גבוהה שניהם יעצרו - שזה מאוד לא יעיל.

### הפתרון - לשים רמזור!

נרויח:

- מעלים את תוחלת התמורה
- יותר הוגן
- מקטין את הסיכוי לתאונה

## Correlate Equilibrium

מניחים שיש גורם חיצוני, mediator, שמציע עזרה לשחקנים:

- הוא יבחר פרופיל כלשהו של אסטרטגיות טהורות
- הוא יגיד לכל שחקן מה הוא צריך לעשות
- לא יגיד לשחקן מה הוא אמר לשחקן האחר (כי אז הוא יעשה את best response שלו)

correlated equilibrium הוא התפלגות של אסטרטגיות מעורבות עבור mediator, כך שכל שחקן ירצה לקיים את החלטת mediator אם הוא מניח שהשחקנים האחרים גם יצייתו ל mediator. כל שיווי משקל נאש אפשר לתאר בתור correlated equilibrium (פשוט mediator לא עושה כלום). ההפך אינו נכון.