שיעורי בית 2- פתרון

20 בדצמבר 2011

1 חבורות למחצה

1. תהי S חבורה למחצה. נגדיר $a*b=b$, הראה כי $(S,*)$ היא חבורה למחצה

הוכחה:

אנו נדרשים להראות אסוציאטיביות ואכן, $a*(b*c)=a*c=c$ וגם $(a*b)*c=b*c=c$.

2. תהי X קבוצה. נסמן ב-X^X את אוסף הפונקציות $X \longrightarrow X$ עם פעולת ההרכבה. הוכח כי זו חבורה למחצה

הוכחה:

שוב אנו נדרשים להראות אסוציאטיביות ואכן, $((f*g)*k)(x)=(f*(g*k))(x)=f(g(k(x)))$.

3. קבע האם $\mathbb{R}$ עם הפעולה $(a*b)=\frac{1}{2}(a^2+b^2)$ הוא חבורה למחצה

קבוצה זו עם הפעולה הנ"ל אינה תת חבורה למחצה ניתן דוגמא נגדית.

$(0*2)*2=\frac{1}{2}(0^2+2^2)*2=2*2=\frac{1}{2}(2^2+2^2)=4$ ואילו

$0*(2*2)=0*4=\frac{1}{2}(0^2+4^2)=8$.

4. תהי S חבורה למחצה ויהי $e\in S$, אם $ex=xe=x\ \forall x\in S$ נאמר כי e הוא **איבר היחידה**. הראה כי אם קיים איבר יחידה בחבורה למחצה הוא יחיד.

הוכחה:

נניח כי קיימים שני אברי יחידה e_1,e_2 אזיי מתקיים כי $e_1=e_1*e_2=e_2$ מההגדרה של איבר יחידה ולכן הם שווים.

2 מונויד

הגדרה: חבורה למחצה עם איבר יחידה תקרא מונויד

5. תהי A קבוצה. הוכח כי $M=A^A=f:A\longrightarrow A$ עם הרכבה היא מונויד (שם לב לתרגיל בחבורות למחצה מספר 2 הוכח רק את התנאים הנוספים)

הוכחה:

צריך להראות כי קיים איבר יחידה (הוכחנו כי קבוצה זו עם פעולת ההרכבה היא חבורה

למחצה לכן אסוציטיבית). איבר היחידה הוא פונקצית הזהות.
תהי $f \in A^A$ אזיי $\forall x \in A$ $(f * Id_A)(x) = f(Id_A(x)) = f(x)$.

6. האם $\mathbb{R}^+ = \{x | x > 0\}$ עם חיבור מונויד ? ועם כפל ?

עם חיבור לא. למשל אין שום מספר גדול מ־0 כך ש־$2 + x = 2$.
עם כפל כן. $x * 1 = x \ \forall x \in R^+$.

7. כתוב את לוח הכפל של כל המונואידים עם 2 אברים.
ישנם שני לוחות כפל של מונואידים בעלי 2 איברים. נשים לב כי בכל מונואיד ישנו איבר יחידה לכן $M = \{e_m, x\}$. כל המכפלות ידועות מראש מהגדרת איבר היחידה פרט ל־$(x * x)$. יש לבדוק כי גם המקרה ש $(x * x) = x$ וגם $(x * x) = e$ מקיימים אסוציטיביות.

*8. כתוב את 7 לוחות הכפל של המונוידים עם 3 אברים.
נכתוב כאן דרך לפתרון ולא את הפתרון עצמו עקב קושי לכתוב טבלאות במסמך. אשתדל להעלות את הפתרון המלא בקרוב.
לכל מונואיד יש איבר יחידה. לכן $M = \{e_m, a, b\}$ כל המכפלות עם e_m ידועות מהגדרת איבר היחידה. עכשיו נותר לנו לבדוק באילו דרכים ניתן להשלים את הטבלה כך שאסוציטיביות תשמר. שוב נשתדל להעלות את 7 הטבלאות הסופיות בקרוב.

3 מונויד־איברים הפיכים

הגדרה: יהי M מונואיד עם איבר יחידה 1_m. נאמר כי איבר הוא הפיך אמ"ם קיים b כך ש $ab = ba = 1_m$

9. הראה שאם a הפיך אז b כנ"ל יחיד.

הוכחה:
נניח כי $ab_1 = b_1a = e$ וגם $ab_2 = b_2a = e$ אזיי מתקיים
$b_2 = b_2 * e = b_2 * ab_1 = e * b_1 = b_1$.

01. יהי M מונויד. הראה כי אוסף כל האיברים ההפיכים ב־M הוא חבורה. נסמן אוסף זה ב־$U(M)$

הוכחה מן הנתונים ידוע כי כל איבר הפיך ומתקיימת אסוציטיביות. נראה כי$U(M)$ סגורה לפעולת M.
יהיו $a, b \in U(M)$ אזיי $a * b \in U(M)$ כי מתקיים $a * b * (b^{-1} * a^{-1}) = e_M$.

*11. תן דוגמא למונויד עם איברים b,a כך ש־ $ab = 1_m$ אבל b,a אינם הפיכים. (**רמז:** חשוב על $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$).
כאן ישנה דוגמא קלאסית שמגיעה ממדעי המחשב. נסתכל על N־ית ביטים מאורך אינסופי (אך עם התחלה) ונסתכל על הפונקציות הזזה (שיפט) ימינה והזזה שמאלה. נשים לב כי ההרכבה של $shift_r * shift_l = Id$ אך אם קודם נבצעה הזזה שמאלה ואז ימינה נדחוף 0 בהתחלה.

4 בדיחה בחבורות

הגדרה: חבורה היא מונויד שכל איבריו הפיכים

מטריצת האפס הולכת למשחק כדורגל ופוגשת שם את המטריצות האלכסוניות. היא שואלת אותן: האם אני יכולה להסתובב איתכן ?
המטריצות האלכסוניות: מה פתאום ! את לא בחבורה...

12. מהי החבורה שהמטריצת האפס כל כך רוצה להיות חלק ממנה ? הוכח כי זו חבורה

למרות שלא נהוג להסביר בדיחות בטח שלא עם הומור משובח כזה :) נחרוג מן המנהג. בבדיחה מדובר על אוסף המטריצות האלכסוניות עם פעולה כך שמטריצת האפס אינה בחבורה לכן הפעולה היא כפל ולא חיבור.

5 חבורות

13. הוכח כי $(\mathbb{Z}_n,+) = (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+) = (\{\bar{0},\bar{1},...,\overline{n-1}\},+)$ (מספרים מודולו n) מהווים חבורה.

הוכחה:

אסוציטיביות וסגירות מודולו n נובעות מן מהגדרת החיבור מודולו n. נראה קיום הופכי לכל איבר. $\forall x \in Z_n$ מתקיים $x + (n - x) = 0 \mod n$

14. מצא את הסדר של כל איבר ב־$\mathbb{Z}_{12} = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

למרות שניתן לוותר על חלק ניכר מן החישובים לאור משפטים שנלמדו בקורס נבצע פעם אחת את החישוב ידנית.

$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 4 \longrightarrow 5 \longrightarrow 6 \longrightarrow 7 \longrightarrow 8 \longrightarrow 9 \longrightarrow 10 \longrightarrow 11 \longrightarrow 0 \longrightarrow 1$
לכן $|1| = 12$.
$2 \longrightarrow 4 \longrightarrow 6 \longrightarrow 8 \longrightarrow 10 \longrightarrow 0 \longrightarrow 2$ לכן $|2| = 6$.
$3 \longrightarrow 6 \longrightarrow 9 \longrightarrow 0 \longrightarrow 3$ לכן $|3| = 4$.
$4 \longrightarrow 8 \longrightarrow 0 \longrightarrow 4$ לכן $|4| = 3$.
$5 \longrightarrow 10 \longrightarrow 3 \longrightarrow 8 \longrightarrow 1 \longrightarrow 6 \longrightarrow 11 \longrightarrow 4 \longrightarrow 9 \longrightarrow 2 \longrightarrow 7 \longrightarrow 0 \longrightarrow 5$
לכן $|5| = 12$.
$6 \longrightarrow 0 \longrightarrow 6$ לכן $|6| = 0$.
$7 \longrightarrow 2 \longrightarrow 9 \longrightarrow 4 \longrightarrow 11 \longrightarrow 6 \longrightarrow 1 \longrightarrow 8 \longrightarrow 3 \longrightarrow 10 \longrightarrow 5 \longrightarrow 0 \longrightarrow 7$
לכן $|7| = 0$.
$8 \longrightarrow 4 \longrightarrow 0 \longrightarrow 8$ לכן $|8| = 3$.
$9 \longrightarrow 6 \longrightarrow 3 \longrightarrow 0 \longrightarrow 9$ לכן $|9| = 4$.
$10 \longrightarrow 8 \longrightarrow 6 \longrightarrow 4 \longrightarrow 2 \longrightarrow 0 \longrightarrow 10$ לכן $|10| = 6$.
$11 \longrightarrow 10 \longrightarrow 9 \longrightarrow 8 \longrightarrow 7 \longrightarrow 6 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4 \longrightarrow 3 \longrightarrow 2 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 11$
לכן $|11| = 2$.

15. תהי G חבורה (מסדר סופי או אינסופי). הוכח כי לכל איבר $x \in G$ הסדר של x ו־x^{-1} שווה.

הוכחה:

נניח בשלילה כי $|x| = n_1$ וכי $|x^{-1}| = n_2$ ונניח ללא הגבלת הכלליות כי $n_2 < n_1$. אנו יודעים מאלגוריתם אוקלידס כי $n_1 = qn_2 + r$ לכן:
$1 = x^{n_1} * (x^{-1})^{n_1} = x^{n_1} * (x^{-1})^{qn_2} * (x^{-1})^r = x^{-r}$ אך אנו יודעים כי $r < n_2$ מאלגוריתם אוקלידס סתירה למינימליות של n_2.

16. אם $x, g \in G$ איברים של G, הוכח כי הסדר של x ו־$g^{-1}xg$ שווה. הסק מכך כי הסדר של ba שווה לסדר של ab.

הוכחה:

נוכיח כי לכל n $x^n = 1 \iff (g^{-1}xg)^n = 1$
נשים לב כי $(g^{-1}xg)^n = g^{-1}x^ng$ אזיי $x^n = 1 \iff g^{-1}x^ng = 1$ בכיוון אחד נכפיל ב־g, g^{-1} בצדדים המתאימים, הכיוון השני מידי.
עכשיו נסיק. $ab = b^{-1}(ba)b$ לפי מה שהוכחנו אנו יודעים כי $|ab| = |b^{-1}(ba)b| = |ba|$.
הסקנו

17. הוכח כי אם $x^2 = 1$ לכל $x \in G$ אזיי החבורה היא אבלית.

הוכחה:

יהי $a, b \in G$ נשים לב כי $x = x^{-1} \iff x^2 = 1$ אזיי $1 = ab(ab)^{-1} = abb^1a^1 = abba$ נכפול ב־ab משמאל ונקבל־ $ab = (ab)^2ba = ba$.

*18 הוכח כי בכל חבורה מסדר זוגי יש איבר מסדר 2. (זהו מקרה פרטי של משפט קושי. מקרה פרטי זה אפשר להוכיח על ידי טריק)

הוכחה:

בחבורה כל איבר הפיך ולכל איבר יש הופכי יחיד. לכן נסתכל על הזוגות $\{(x, x^{-1}) | x \in G\}$ איבר היחידה הוא ההופכי של עצמו לכן אם סדר החבורה זוגי זה גורר שחייב להיות עוד איבר שהוא ההופכי של עצמו (לפחות אחד) ולכן $\{\exists x \in G | x \neq e_G | x^2 = 1\}$ וזהו האיבר מסדר 2.