פונקציות מרוכבות – תרגול 11

חזרה על הבוחן:

בעיקרון הציונים היו נמוכים משציפיתי. ממוצע של בערך 65 בבדיקה הראשונית. את שאלות 1,4 הרבה הצליחו לפתור, ואת שאלה מספר 3 אף אחד לא פתר נכונה. (למרות שד"ר נבו פתר תרגיל דומה בהרצאה). בשאלה 2 הרבה פתרו רק חלקית.

1. נניח כי $z\in\mathbb{C}$ ונניח ש- $z^2+\frac{1}{\bar{z}^2}\in\mathbb{R}$. הוכיחו שבהכרח $z\in\mathbb{R}$ או $iz\in\mathbb{R}$.

פתרון:

נפתור בשתי דרכים:

א. נתון $\frac{1}{z^2}+\bar{z}^2=\frac{1}{\bar{z}^2}+z^2$. ז"א $\frac{\bar{z}^2z^2+1}{z^2}=\frac{z^2\bar{z}^2+1}{\bar{z}^2}$. מכאן ש $z^2=\bar{z}^2$. נרשום $z=x+iy,\bar{z}=x-iy$. מקבלים $x^2-y^2+2xyi=x^2-y^2-2xyi$. זאת אומרת $x=0$ או $y=0$.וזאת אומרת $iz\in\mathbb{R}$ או $z\in\mathbb{R}$.

2. נגדיר $f(z)\equiv f(x+iy)=x^2(1+i)+y^2(1-i)$.

א. באילו נקודות $f'(z)$ קיימת? חשבו את הנגזרת בנקודות אלו.

ב. באילו נקודות $f(z)$ אנליטית?

פתרון:

א.

ניתן לרשום $f(x+iy)=x^2+y^2+i\left(x^2-y^2\right)=u+iv$. הפונקציות u,v דיפר' בכל המישור, ולכן ע"פ משפט מההרצאה\תרגול תנאי קושי רימן קובע את הגזירות.
$u_x=2x,u_y=2y,v_x=2x,v_y=-2y$. CR מתקיים על הישר שבו $y=-x$ ושם f גזירה.

את הנגזרת אפשר לחשב ע"י $f'(z_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(z_0+\Delta x)-f(z_0)}{\Delta x}$ שזוהי הנגזרת החלקית לפי x.
מתקבל $f'(x+iy)=2x(1+i)$.

ב. אף נקודה. אין מקום.

3. נתון ש- $\frac{u^2}{4}+\frac{v^2}{9}=1$ נגזור לפי המשתנים ונקבל $\frac{1}{2}uu_x+\frac{2}{9}vv_x=0=\frac{1}{2}uu_y+\frac{2}{9}vv_y$ ע"י שימוש במשוואת קושי-רימן המשוואות נהיות $\frac{1}{2}uu_x-\frac{2}{9}vu_y=0=\frac{1}{2}uu_y+\frac{2}{9}vu_x$. ובכתיב

מטריצי $\begin{bmatrix} \frac{1}{2}u & -\frac{2}{9}v \\ \frac{2}{9}v & \frac{1}{2}u \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. אם המטריצה הפיכה מקבלים $u_x=u_y=0$ המטריצה לא הפיכה אם $\frac{1}{4}u^2+\frac{4}{9}v^2=0$ כלומר בראשית. אבל בגלל הרציפות, אפילו בראשית $u_x=u_y=0$.
מכאן ש- u קבועה. ופשוט להראות שגם v קבועה.

4. הפונקציה $f(z)=\frac{\exp(z^2)}{z}$ אנליטית בתחום. ע"פ נוסחת קושי $I=2\pi i f'(2i)=\frac{9\pi i}{2e^4}$.

בחזרה לעניינים:

הגדרה: אומרים של- $f(z)$ קוטב מסדר m בנקודה z_0 אם ל- $\frac{1}{f(z)}$ יש אפס מסדר m שם.

באופן שקול ניתן לרשום $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$ עבור $\varphi(z)$ אנליטית שלא מתאפסת בנקודה.

תרגיל ממבחן: נניח $r(z), f(z), g(z), h(z)$ הן פונקציות אנליטיות בסביבת z_0. כמו כן ל- f אפס מסדר 1 ב- z_0, ל- g אפס מסדר 4 ב- z_0, ל-h אפס מסדר 2, ול-r אפס מסדר 3. מהו סוג הסינגולריות של $\frac{f(z)+g(z)}{h(z)+r(z)}$ בנק' z_0 ?

פתרון: קוטב פשוט. נרשום
$$f(z)=(z-z_0)\varphi(z), g(z)=(z-z_0)^4\psi(z), h(z)=(z-z_0)^2\chi(z), r(z)=(z-z_0)^3\eta(z)$$
ונציב בשבר.

הערה: ישנו קשר בין סוג הסינגולריות לבין טור לורן בסביבת הנקודה.

לפונקציה יש קוטב מסדר m או"א החזקה השלילית ביותר בפיתוח היא $-m$.

לפונקציה יש סינגולריות עיקרית או"א יש אינסוף חזקות שליליות.

משפט השארית:

יהי $U\subseteq\mathbb{C}$ תחום פשוט קשר, $z_1,z_2,...,z_n\in U$ מספר סופי של נקודות בתחום. תהי f פונקציה הולומורפית (אנליטית) בקבוצה $U\setminus\{z_1,...,z_n\}$. יהי γ עקום סגור ב- U שלא פוגש אף אחת מהנקודות z_k. אזי $\oint_\gamma f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Ind_\gamma(z_k)\operatorname{Res}(f,z_k)$.

במקרה שהעקומה מקיפה את כל הנקודות פעם אחת $\oint\limits_{\gamma} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}(f,z_k)$.

המלצות לחישוב השארית בנקודה $z=z_0$:

1. אם הפונקציה אנליטית בסביבת z_0 , $\mathrm{Re}s(f,z_0)=0$

2. אם לפונקציה קוטב מסדר נמוך m בנק' z_0

$$\mathrm{Re}s(f,z_0)=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\left[(z-z_0)^m f(z)\right]$$

3. אם לפונקציה קוטב מסדר גבוה, (בערך $m\ge 3$) הנוסחה למעלה עלולה להיות מסובכת ועדיף לפתח לטור לורן, ולקחת את המקדם a_{-1} של החזקה $(z-z_0)^{-1}$

4. במקרה של סינגולריות עיקרית, אין כל כך ברירה, ויש לחשב טור לורן.

תרגיל: חשבו $I=\oint\limits_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz$.

פתרון: רק הנקודה $z=2$ מוקפת ע"י העקומה, והיא מוקפת פעם אחת. ע"פ משפט השארית $\oint\limits_{|z|=3}\frac{3}{(5-z)(z-2)^4}dz=2\pi i\,\mathrm{Re}s(f,2)$. נמצא את השארית

$$\mathrm{Re}s(f,2)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 2}\frac{d^3}{dz^3}\frac{3}{5-z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d^3}{dz^3}\frac{1}{5-z}=\frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{6}{(5-z)^4}=\frac{6}{2*3^4}=\frac{1}{27}.$$

מכאן ש- $I=\frac{2\pi i}{27}$

ניתן להשתמש במשפט השארית גם כדי לחשב אינטגרלים של פונקציות טריגו'.

תרגיל: חשבו $\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+3\cos^2\theta}d\theta$

פתרון: נעשה הצבה $z=e^{i\theta}$ ואז הקטע $0\le\theta\le 2\pi$ הופך למעגל היחידה $|z|=1$. כמו כן $dz=ie^{i\theta}d\theta=izd\theta\Rightarrow d\theta=\frac{dz}{iz}$. ניתן לרשום $\cos(\theta)=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}=\frac{z+1/z}{2}$ ולקבל

$$\int_0^{2\pi}\frac{1}{1+3\cos^2\theta}d\theta=\oint\limits_{|z|=1}\frac{1}{1+3\left(\frac{z+1/z}{2}\right)^2}\frac{dz}{iz}=\oint\limits_{|z|=1}\frac{4}{4+3\left(z^2+2+\frac{1}{z^2}\right)}\frac{dz}{iz}=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{dz}{4+3z^3+6z+\frac{3}{z}}$$

$$=\frac{4}{i}\oint\limits_{|z|=1}\frac{zdz}{3z^4+10z^2+3}$$

לאינטגרנד יש קטבים בנקודות -3 , $-\frac{1}{3}$ $z^2 = \frac{-10 \pm \sqrt{100-36}}{6} = \frac{-10 \pm 8}{6} = -\frac{1}{3}, -3$ כלומר

$z = \pm i\sqrt{1/3}, \pm i\sqrt{3}$. עלינו לחשב את השארית רק בנקודות $z = \pm i\sqrt{1/3}$ כי הן בתוך המעגל.

$$\operatorname{Res}\left(\frac{z}{3z^4+10z^2+3}, i\sqrt{1/3}\right) = \left.\frac{z}{12z^3+20z}\right|_{z=i\sqrt{1/3}} = \left.\frac{1}{12z^2+20}\right|_{z=i\sqrt{1/3}} = \frac{1}{-12/3+20} = \frac{3}{48} = \frac{1}{16}$$

השארית השנייה יוצאת אותו דבר. $I = 2\pi i \frac{4}{i}\left(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}\right) = \pi$