משוואות דיפרנציאליות רגילות – תרגיל II

משוואות הומגניות הן משוואות הממורכבות מפונקציות הומוגניות.

<u>הגדרה של פונקציה הומוגנית</u> : $f(tx,ty)=t^n f'(x,y)$.

דוגמא : האם הפונקציה $f(x,y)=xy+x^2+3y^2$ היא הומוגנית? נבדוק ע"פ ההגדרה.

נקבל $f(tx,ty)=tx\cdot ty+(tx)^2+3\,(ty)^2=t^2(xy+x^2+3y^2)$ ולכן היא הומוגנית.

גילו כי עבור המשוואה $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ כאשר Q,P פונקציות הומוגניות.פיתחו דרך מאוד פשוטה שתמיד עובדת לפתירת משוואות מסוג זה.

1. ניתן להביא את המשוואה ההומוגנית לצורה של פונקציה של מנה $f\left(\frac{y}{x}\right)$.
2. נציב $\frac{y}{x}=z$ ומאחר ו$y=zx$ ניתן לקבל $\frac{dy}{dx}=z+x\frac{dz}{dx}$.
3. ניתן לבצע הפרדת משתנים. (לא לשכוח את האינטגרל, ואת הקבוע)

דוגמא : $(y^2+xy)dx+3x^2dy=0$

פתרון : ע"פ האלגוריתם שרשמנו, נקבל $\frac{dy}{dx}=-\frac{y^2+xy}{3x^2}=-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^2-\frac{1}{3}\left(\frac{y}{x}\right)$ וכעת נציב $z=\frac{y}{x}$ כדי לקבל $z+x\frac{dz}{dx}=-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{3}z$
נעביר אגפים ונבצע את הפרדת המשתנים.

קיבלנו $z+\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{3}z+x\frac{dz}{dx}=0$

ואז $\frac{z^2+4z}{3}\ dx=-x\ dz$

וע"י חילוק $-\frac{1}{x}dx=\frac{3}{z^2+4z}dz$

נבצע אינטגרציה $\int -\frac{1}{x}dx=\int\frac{3}{z^2+4z}dz+C$ (*הערה לגבי אגף ימין)

ונקבל $\frac{3}{4}(\ln z-\ln(z+4))=-\ln x+C$

העברת אגפים ונקבל $\left(\frac{z}{z+4}\right)^{\frac{3}{4}}=\frac{a}{x}$

כעת נציב את הz שהגדרנו, ואז $1+\frac{4y}{x}=a'x^{\frac{4}{3}}$

העברת אגפים $y=\frac{4x}{a'x^{\frac{4}{3}}-1}$

וכעת נותר לבדוק ע"פ גזירה אם המשוואה מתקיימת. פתרנו ☺

דוגמא : $x(y'^2-1)=y$

פתרון : $y'^2=\frac{y}{x}$

ואז $y'=\frac{\sqrt{y+x}}{\sqrt{x}}$. זוהי משוואה הומוגנית ע"פ הגדרה. נבצע את האלגוריתם שרשמנו :

נקבל $\frac{dy}{dx}=\sqrt{\frac{y}{x}+1}$

ע"י הצבה של Z נקבל $z+x\frac{dz}{dx}=\sqrt{z+1}$

עביר אגפים ונקבל אינטגרלים $\int\frac{1}{x}dx=\int\frac{z}{\sqrt{z+1}-z}dz$.

מכאן זה ברור (לא לשכוח את הקבוע אינטגרציה!)

<u>נחזור למשוואת מדוייקות</u> :

נגדיר מהי משוואה לינארית מסדר ראשון : $y'+Py=Q$ כאשר P,Q פוקנציות של X. בהרצאה נוכיח כי קיים פתרון, והפתרון הוא :
$y\,e^I=\int e^I Q dx+C$ כאשר $I=\int P\ dx$ ואז $y=e^{-I}\int Qe^I dx+Ce^{-I}$.

דוגמא : רדיום דועך לראדון שדועך לפולוניום. אם בזמן *t=0* קיים רק רדיום כמה ראדון קיים הזמן *t*?

נתונים : כמות אטומי הרדיום ההתחלתית היא N_0 , בזמן t כמות אטומי הרדיום הוא N_1 כמות אטומי הראדון בזמן t הוא N_2. גם כן נתון λ_1,λ_2 קבוע דעיכה של ראדון ורדיום. קבועי הדעיכה פרופורציוניים לכמות החומר.

פתרון : חשוב לשים לב שגם הראדון מתפרק. לכן יש לנו שתי משוואות : $\begin{cases}\frac{dN_1}{dt}=-\lambda_1 N_1\\ \frac{dN_2}{dt}=\lambda_1 N_1-\lambda_2 N_2\end{cases}$. את הפתרון למשוואה הראשונה אפשר לחשב בקלות ע"י איטגרציה ולקבל ביטוי סופי ע"י הצבת נתוני ההתחלה : $N_1=N_0e^{-\lambda_1 t}$.

כעת נפתור את המשוואה השניה, וראשית כל נציב את הפתרון של המוואה הקודמת.

נקבל: $\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 N_2$

נעביר אגפים ונקבל משוואה ליניארית $\frac{dN_2}{dt} + \underbrace{\lambda_2}_{P} N_2 = \underbrace{\lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t}}_{Q}$

ולכן $\mathrm{I} = \int pdt = \int \lambda_2 dt = \lambda_2 t$

נציב הכל בפתרון הכללי שרשמנו ונקבל $N_2 = e^{-\lambda_2 t} \int \lambda_1 N_0 e^{-\lambda_1 t} e^{\lambda_2 t} dt + ce^{-\lambda_2 t}$.

נפתור את האינטגרל ונקבל $N_2 = e^{-\lambda_2 t} N_0 \frac{e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}}{\lambda_2 - \lambda_1} + ce^{-\lambda_2 t}$

נתון תנאי התחלתי שבזמן אפס אין ראדון. ז״א כי $C + N_0 \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = 0$ ולכן $C = \frac{N_0}{\lambda_1 - \lambda_2}$. קיבלנו את פתרון המשוואה.

הערות:

*האינטגרל $\int \frac{3}{z^2+4z} dz$ הוא ע״י פירוק של $\frac{3}{z^2+4z} = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+4}\right)$.