שילוש:
תהי

$$A=\left(\begin{array}{cccc} -1 & -3 & -4 & -5 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 9 & 12 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

$$p_A=(x-1)^2\,(x-2)^2$$

ע"ע: $1,2$ מריבוי אלגברי 2.
וקטורים עצמיים:

$$V_1=span\{\left(\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{array}\right)\}V_2=span\{\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{array}\right)\}$$

כל ע"ע הוא מריבוי גאומטרי 1, ולכן המטריצה לא לכסינה.

$$P=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$P^{-1}AP=\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & -4.5 & -6.5 \\ \hline 0 & 0 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 3.5 \end{array}\right)$$

$$B=\left(\begin{array}{cc} -0.5 & -2.5 \\ 1.5 & 3.5 \end{array}\right)$$

$$p_B=(x-1)(x-2)$$

$$D=\left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{array}\right)$$

ניתן למצוא מטריצה מלכסנת, נסמן אותה בQ.

$$\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array}\right)P^{-1}AP\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & Q \end{array}\right)=$$

$$\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & Q^{-1} \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0.5 & 1.5 \\ 0 & 2 & -4.5 & -6.5 \\ \hline 0 & 0 & -0.5 & -2.5 \\ 0 & 0 & 1.5 & 3.5 \end{array}\right)\left(\begin{array}{cc} I & 0 \\ 0 & Q \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cccc} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

הערה: מטריצה שניתנת לשילוש יכולה להיות דומה להרבה מטריצות משולשיות שונות.

הערה: אם A דומה למטריצה משולשית D, איברי האלכסון של D שווים לע"ע של A, כאשר כל ע"ע מופיע מספר פעמים לפי הר"א שלו בA.

הוכחה: A וD דומות לכן יש להן את אותו פ"א.

אנחנו יודעים שפ"א של מטריצה משולשית שווה

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

כאשר $\alpha_1, ..., \alpha_n$ הם האיברים באלכסון של D.

לכן קיבלנו שאיברי האלכסון של D הם הע"ע של A, כי הם שורשי הפולינום האופייני, כאשר כל גורם $(x-\alpha)$ מופיע מספר פעמים כמספר ההופעות של α על האלכסון.

תרגיל: תהי A מטריצה ניתנת לשילוש. הוכיחו שסכום הע"ע (כל ע"ע נסכם מספר פעמים לפי הריבוי האלגברי שלו) שווה ל$tr(A)$, ומכפלת הע"ע (כל ע"ע מכפילים מספר פעמים לפי הר"א שלו) שווה ל$|A|$.

הוכחה: נתון שA ניתנת לשילוש, לכן יש מטריצה משולשית D שדומה לA. למטריצות דומות יש את אותם ע"ע עם אותו ר"א, ואת אותה דטרמיננטה וגם את אותו $trace$.

$$P^{-1}AP = D$$

$$|D| = |P^{-1}AP| = |P^{-1}||A||P| = \frac{1}{|P|}|A||P| = |A|$$

$$tr(D) = tr(P^{-1}AP) = tr(P \cdot P^{-1}A) = tr(A)$$

$$tr(AB) = tr(BA)$$

לכן מספיק להוכיח את כל הטענות על D. אבל במטריצה משולשית הע"ע נמצאים על האלכסון, מספר פעמים לפי הר"א. לכן ברור שהסכום שווה ל$trace$. וידוע שבמטריצה משולשית הדטרמיננטה היא מכפלת איברי האלכסון.

הערה: מעל $\mathbb{C}$ כל מטריצה ניתנת לשילוש.

תרגיל: תהי $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$ מטריצה ממשית שמקיימת: $tr(A) = 0$, $|A| = -1$ ו$A^2 + I$ מטריצה לא הפיכה. חשבו את A^{100}.

פתרון:

$$A^2 + I = (A + iI)(A - iI)$$

$A^2 + I$ לא הפיכה, זה אומר ש$A + iI$ או $A - iI$ לא הפיכה.

זה אומר שi הוא ע"ע, או $-i$ הוא ע"ע.

הפ"א של A הוא ממשי.

בפולינום ממשי, אם λ הוא שורש, אז גם $\bar{\lambda}$ הוא שורש.

הוכחה הטענה האחרונה:

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ...a_1 x + a_0$$

פולינום ממשי זה אומר שכל המקדמים ממשיים.

$$a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ...a_1\lambda + a_0 = 0$$

נפעיל צמוד על הכל.

$$\overline{a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + ...a_1\lambda + a_0} = \bar{0} = 0$$

צמוד הוא כיפלי וחיבורי. ובנוסף, צמוד של מספר ממשי זה המספר עצמו. לכן

$$a_n\bar{\lambda}^n + a_{n-1}\bar{\lambda}^{n-1} + ...a_1\bar{\lambda} + a_0 = 0$$

וזה בדיוק אומר ש$\bar{\lambda}$ הוא שורש של הפולינום.
לכן בתרגיל שלנו, גם i וגם $-i$ יהיו ע"ע.
הפ"א של A מתפרק לגורמים לינאריים מעל $\mathbb{C}$ לכן יש לו 4 ע"ע כולל ריבוי.

$$i, -i, a, b$$

ממשפט קודם, סכום הע"ע הוא $tr(A) = 0$. לכן

$$a + b = 0$$

ובנוסף, מכפלת הע"ע שווה ל $|A| = -1$. לכן

$$i \cdot -i \cdot a \cdot b = -1$$

אבל $i \cdot -i = 1$ולכן

$$ab = -1$$

$a = -b$.

$$-a^2 = -1$$

$$a^2 = 1$$

$$a = \pm 1 \implies b = \mp 1$$

לכן סה"כ הע"ע הם:

$$1, -1, i, -i$$

A לכסינה מעל המרוכבים, כי יש לה n ע"ע שונים. יש P מרוכבת הפיכה כך ש:

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}$$

$$A^{100} = \left(P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix} P^{-1}\right)^{100} = P \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix}^{100} P^{-1} = PIP^{-1} = I$$

תרגיל: הוכיחו שהמטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 2 & 2 & & & \\ -2 & -2 & & & \\ \vdots & & & & \\ \frac{n}{2} & \frac{n}{2} & & & \\ -\frac{n}{2} & -\frac{n}{2} & & & \end{pmatrix}$$

אינה לכסינה.

פתרון: $tr(A) = 0$.

$rank(A) = 1$.

יש ע"ע 0 מר"ג $n-1$.

$$p_A = x^{n-1}(x - \alpha)$$

סכום הע"ע הוא 0, לכן הע"ע הנוסף הוא 0.

לכן הר"א של 0 הוא n. אבל הר"ג הוא $n-1$. לכן A לא לכסינה.

תרגיל: תהי A מטריצה מרוכבת. ונניח ש

$$p_A = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$$

אז

$$tr(A) = -a_{n-1}$$

$$|A| = (-1)^n a_0$$

הוכחה: A מטריצה מרוכבת לכן p_A מל"ל.

$$p_A = (x-\alpha_1)\cdots(x-\alpha_n)$$

פשוט צריך להבין איך נראית המכפלה. בשביל המקדם של x^{n-1} אנחנו צריכים כל פעם לבחור באחד מהביטויים את האיברים החופשי ובכל השאר את x. ולכן $a_{n-1} = -\sum \alpha_i = tr(A)$
ובשביל המקדם החופשי צריך לבחור כל פעם את המקדם החופשי בכל ביטוי. לכן

$$a_0 = (-\alpha_1)\cdots(-\alpha_n) = (-1)^n \alpha_1 \cdots \alpha_n = (-1)^n |A|$$

מסקנה: במטריצה 2×2 הפולינום האופייני הוא:

$$p_A = x^2 - tr(A)x + |A|$$

תזכורת: בתרגול הראשון ראיתם שאם λ הוא ע"ע של A אז λ^k הוא ע"ע של A^k לכל $k \in \mathbb{N}$.
בנוסף, ראיתם שייתכן שλ^k הוא ע"ע של A^k, אבל λ לא ע"ע של A
הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A^4 = I$$

מעל הממשיים אין לA ע"ע, ולA^4 יש את 1 בתור ע"ע.
מעל המרוכבים, הע"ע של A הם $\pm i$.
כלומר, אנחנו רואים שכל הע"ע של A^4 מגיעים מכך שלקחנו ע"ע של A והעלינו אותו ברביעית.
שאלה: אם λ הוא ע"ע של A^k, האם יש לו שורש מסדר k שמהווה ע"ע של A?
ניסוח שקול: אנחנו יודעים שאם ניקח את הע"ע של A, ונעלה אותם בחזקת k, נקבל ע"ע של A^k. האם אלה כל הע"ע של A^k?
תשובה: אם הפ"א של A מל"ל, הטענה נכונה. בפרט, הטענה נכונה למטריצות מרוכבות.
הוכחה: שלב ראשון, נוכיח שהטענה נכונה עבור מטריצות משולשיות.
כלומר, נניח שD מטריצה משולשית, ו$\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ הם הע"ע של D. אז $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ זה כל הע"ע של D^k.
למה זה נכון?
D מטריצה משולשית, ולכן איברי האלכסון שלה הם בדיוק הע"ע.

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & *' & *' \\ 0 & \ddots & *' \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

D^k היא מטריצה משולשית, ולכן הע"ע שלה הם איברי האלכסון.
כלומר, $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$.
שלב שני: תהי A מטריצה ניתנת לשילוש. ויהיו $\lambda_1, ..., \lambda_n$ הע"ע של A.
A דומה למטריצה משולשית, לכן

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$P^{-1}A^kP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * & * \\ 0 & \ddots & * \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & *' & *' \\ 0 & \ddots & *' \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$$

לכן הע"ע של A^k שווים לע"ע של $\begin{pmatrix} \lambda_1^k & *' & *' \\ 0 & \ddots & *' \\ 0 & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix}$, שזה בדיוק $\lambda_1^k, ..., \lambda_n^k$.

תרגיל: חשבו את כל הע"ע של

$$A = \begin{pmatrix} & & & 1 & \\ 1 & & & & \\ & & 1 & & \\ & 1 & & & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

מעל המרוכבים.

$$A^3 = I$$

פתרון: הע"ע היחיד של A^3 הוא 1.
לכן האפשרויות לע"ע של A הם השורשיים השלישיים של 1.

$$1, cis(\frac{2\pi}{3}), cis(\frac{4\pi}{3})$$

1 עובד. כי הוא מתאים לוקטור שכולו אחדות.
לא ייתכן ש1 הוא ע"ע היחיד, כי $tr(A) = 2$, אז סכום הע"ע צריך להיות 2.
לכן לפחות אחד מחרכים המרוכבים יהיה שורש של הפ"א. ובגלל שהוא ממשי אז גם הערך השני יהיה (כי הם צמודים אחד לשני).