

סמסטר א' (מועד א'), תשע"ז

1. תהי A מטריצה ריבועית מרוכבת

(א) הוכיחו של- A ול- A^t אותם ע"ע.

פתרון. נחשב את הפלינום האופייני

$$\begin{aligned} p_{A^t}(\lambda) &= |\lambda I - A^t| = \\ &= |\lambda I^t - A^t| = \\ &= |\lambda I - A| = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

יש להם אותו פולינום אופייני ולכן אותם ע"ע

(ב) הניחו שסכום איברי כל עמודה של A הוא 5777. הוכיחו ש-5777 הוא ע"ע של A .

פתרון. ראשית נראה שלמטריצה $B = A^t$ יש ע"ע 5777 על ידי זה שנראה ש-

$$\text{הוא } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

ר"ע לע"ע הדרוש

$$\left[B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]_i = \left[\begin{pmatrix} - & R_1(B) & - \\ - & R_2(B) & - \\ & \vdots & \\ - & R_n(B) & - \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right]_i = \sum_j [R_i(B)]_j = 5777$$

לכן

$$B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = 5777 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

כלומר 5777 הוא ע"ע של $B = A^t$ ולפי סעיף קודם הוא ע"ע של A .

(ג) הניחו של- A יש ערך עצמי λ המקיים $|\lambda| > 1$ הראו שלכל n טבעי $A^n \neq I$.

פתרון. נניח בשלילה שקיים n כך ש-

$$A^n = I$$

. כידוע אם λ הוא ע"ע של A אז λ^n הוא הע"ע של A^n (בבחינה יש להוכיח) לכן אם $|\lambda| > 1$ אז גם $|\lambda^n| > 1$ בסתירה לזה שכל הע"ע של A^n הם 1

2. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}$ ויהי U מרחב הפתרונות של המערכת $Ax = 0$

ו- $W = U^\perp$ ביחס למכפלה הפנימית הסטנדרטית של \mathbb{R}^4

(א) הוכיחו שלכל $u \in U, w \in W$ מתקיים $\|u + w\| = \|u - w\|$.

פתרון. זה נכון עבור שני כל מרחב ובמרחב הניצב שלו

$$\|u - w\| = \langle u - w, u - w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle$$

בעוד ש-

$$\|u + w\| = \langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle$$

(ב) מצאו בסיס אורתונורמלי ל- U ובסיס אורתונורמלי ל- W .

פתרון. זה נכון עבור שני כל מרחב ובמרחב הניצב שלו

$$\|u - w\| = \langle u - w, u - w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle$$

בעוד ש-

$$\|u + w\| = \langle u + w, u + w \rangle = \langle u, u \rangle + \langle w, w \rangle$$

ראשית נמצא בסיס ל- U ו- W ואז נעשה גרם שמידט:

$$U = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid \begin{cases} x + w = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases} \right\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

כעת נבצע גרם שמידט על הבסיסים

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-1

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \rightarrow \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{כלומר בסיס אורתונורמלי ל-} U \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \sqrt{\frac{1}{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

-1

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{0}{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

בסיס אורתונורמלי ל- U^\perp לכן $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$

(ג) יהי $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ מצאו $v = u + w$ כך ש- $u \in U, w \in W$

פתרון. נשים שלב ש-

$$v = \pi_W(v) + v - \pi_W(v)$$

מכאן

$$\pi_W(v) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

כלומר

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{4}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

3. יהי $V = \mathbb{R}_2[x]$ נגדיר העתקה $T(p(x)) = p(x) + p(x+1)$

(א) הראו כי T היא ה"ל והציגו אותה לפי בסיס של V כרצונכם

פתרון. נאכן מתקיים

$$T(p(x) + aq(x)) = p(x) + aq(x) + p(x+1) + aq(x+1) = T(p(x)) + aT(q(x))$$

מטריצה מייצגת:

$$T(a + bx + cx^2) = a + bx + cx^2 + a + b(x+1) + c(x+1)^2 = 2a + b + c + (2b + 2c)x + 2cx^2$$

לכן

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

(ב) חשבו את הפולינום האופייני $f_T(x)$ ואת הפולינום המינימלי $m_T(x)$

פתרון. נאכן מתקיים

$$T(p(x) + aq(x)) = p(x) + aq(x) + p(x+1) + aq(x+1) = T(p(x)) + aT(q(x))$$

מטריצה מייצגת:

$$T(a + bx + cx^2) = a + bx + cx^2 + a + b(x+1) + c(x+1)^2 = 2a + b + c + (2b + 2c)x + 2cx^2$$

לכן

$$[T]_S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

מכאן הפולינום האופייני הוא

$$p_T(x) = (x - 2)^3$$

נמצא את הריבוי הגראומטרי של $\lambda = 2$ ונקבל

$$V_2 = N \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לכן צורת הזרדן היא

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

לכן הפולינומים המינימלי הוא

$$m_A(x) = (x - 2)^3$$

(ג) מצאו את צורת זרדן של T האם T לכסינה?

פתרון. נעשה בסעיף הקודם

4. הוכח/הפוך:

(א) אם לשתי מטריצות מרוכבות מסדר 3×3 יש אותו פולינום אופייני ואותו פולינום מינימלי אז הן דומות

פתרון. נכון, יש לעבור על כל האופציות של בלוקי זרדן

(ב) אם מטריצה לכסינה אז הריבוי האלגברי של כל עש שלה שווה ל-1

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$A = I$$

(ג) אם הפולינום המינימלי של מטריצה ריבועית A הוא $m_A(x) = x^4$ אז $I - 4A$ היא הפיכה

פתרון. נחפש מטריצה $B = aA^3 + bA^2 + cA + dI$ כך ש- $(I - 4A)B = I$ ניקח את אז

$$\begin{aligned} (I - 4A)B &= (I - 4A)B = \\ &= (I - 4A)(aA^3 + bA^2 + cA + dI) = \\ &= aA^3 + bA^2 + cA + dI - 4aA^4 - 4bA^3 - 4cA^2 - 4dA = \\ &= (a - 4b)A^3 + (b - 4c)A^2 + (c - 4d)A + dI \end{aligned}$$

מכאן

$$\begin{cases} d = 1 \\ c = 4 \\ b = 4 \\ a = 16 \end{cases}$$

כלומר

$$16A^3 + 4A^2 + 4A + I$$

היא ההופכית.

(ד) כל קבוצה אורתוגונלית שאינה מכילה את ווקטור ה-0 היא בת"ל

פתרון. נכון, הוכחנו בתרגול

$$0 = \langle 0, v_j \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \langle v_i, v_j \rangle = \alpha_j \langle v_j, v_j \rangle$$

$$\alpha_j = 0$$

(ה) העע של מטריצה ממשית סימטרית ואורתוגונלית הם כולם ± 1

פתרון. נכון, הוכחנו בתרגול

$$\langle v, v \rangle = v^t A^t A v = (Av)^t Av = \langle Av, Av \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \lambda \lambda \langle v, v \rangle = \lambda^2 \langle v, v \rangle$$

$$\lambda^2 = \pm 1$$

(ו) יהי V ממ"פ $\dim(V) \geq 2$ ויהיו $u, v \in V$. אם $\|u\| = \|v\| = \|u + v\|$ אז $u = v = 0$

פתרון. לא נכון, ניקח את

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

אז האורכים היו $\|u\| = \|v\| = \|u + v\| = 1$