בוחן אלגברה לינארית למהנדסים תשעח

11/12/2015 (כ"ג כסליו)

מתרגלים: אחיה בר־און, אריאל ויצמן, עדי בן צבי ועוזי חרוש.

- ענו על כל השאלות. **יש לנמק כל תשובה!!**
- **על כל דף תשובה רשמו ת.ז. ואת שמכם המלא. על מחברת בחינה ממדור בחינות מספיק למלא רק בעמוד הראשון.**
- **בנוסף, כתבו במקום ברור מי המתרגל אליו אתם נכנסים.**
- הקפידו על סדר ניקיון.
- משך הבוחן: שעה ועשרים דקות.
- ללא חומר עזר. גם לא מחשבון.
- השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי־ מומלץ להתחיל עם שאלות אותן אתם יודעים לפתור.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שעליהן אתם יודעים לענות.

חלקו את זמנכם בתבונה!

Q1	
Q2	
Q3	
total	

בהצלחה!

1. (33 נקודות) נגדיר מטריצות

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$$

תהא מטריצה $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ המקיימת

$$ABC = I$$

חשבו את המטריצות A^{-1}, B^{-1}

פתרון: לפי השיוון $ABC = I$ נקבל כי המכפלה ABC הפיכה (כי I הפיכה) ולכן A, B, C הפיכות.

נדרג את $(A|I)$ על מנת למצוא את A^{-1}:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

ואז לפי התיאוריה נקבל כי

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

כעת, מהשיוון $ABC = I$ נקבל כי $BCA = I$ ע"י הכפלת A^{-1} משמאל ו A מימין. לכן, לפי משפט,

$$B^{-1} = CA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 & 5 \\ 3 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

המשך תשובה לשאלה 1

2. (33 נקודות) ענו על אחד מהסעיפים הבאים. **בונוס:** סעיף נוסף מזכה את פותריו נכונה ב־5 נקודות!

(א) נגדיר $v=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$. הוכיחו כי

$$W=\left\{A\in\mathbb{C}^{5\times5}\,|\,Av=0\right\}$$

הוא ס;תת מרחב של $\mathbb{C}^{5\times5}$.

פתרון: מתקיים כי $0\in W$ (מטריצת האפס שייכת ל W) כי $0v=0$. בנוסף: יהיו $A_1,A_2\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{C}$ צ"ל $\alpha A_1+A_2\in W$. אכן

$$\left(\alpha A_1+A_2\right)v\overset{(1)}{=}\alpha A_1v+A_2v\overset{(2)}{=}\alpha 0+0\overset{(3)}{=}0$$

כאשר (1) נכון בגלל כלל הפילוג במטריצות, (2) נכון כי $A_1,A_2\in W$ ולכן $A_1v=0,A_2v=0$, (3) זה חישוב ישיר. לכן $\alpha A_1+A_2\in W$ כנדרש.

(ב) תהא $A\in\mathbb{C}^{5\times5}$. נגדיר

$$W=\left\{B\in\mathbb{C}^{5\times5}\,|\,AB^t=B^tA\right\}$$

הוכיחו כי W הוא תת מרחב של $\mathbb{C}^{5\times5}$.

פתרון: מתקיים כי $0\in W$ (מטריצת האפס שייכת ל W) כי $A0^t=0=0^tA$. בנוסף: יהיו $B_1,B_2\in W$ ו $\alpha\in\mathbb{C}$ צ"ל $\alpha B_1+B_2\in W$. אכן

$$\begin{aligned}A\left(\alpha B_1+B_2\right)^t&\overset{(1)}{=}A\left(\alpha B_1^t+B_2^t\right)\overset{(2)}{=}\alpha AB_1^t+AB_2^t\overset{(3)}{=}\\ \alpha B_1^tA+B_2^tA&\overset{(2)}{=}\left(\alpha B_1^t+B_2^t\right)A\overset{(1)}{=}\left(\alpha B_1+B_2\right)^tA\end{aligned}$$

כאשר (1) נכון בגלל חוקי שיחלוף, (2) נכון בגלל כלל פילוג במטריצות + "סקלאר נודד", (3) נכון כי $B_1,B_2\in W$ ולכן $AB_i^t=B_i^tA$ (עבור $i=1,2$). לכן $\alpha B_1+B_2\in W$ כנדרש.

המשך תשובה לשאלה 2

3. (34 נקודות) ענו על 2 מהסעיפים הבאים. **בונוס**: סעיף נוסף מזכה את פותריו נכונה ב־5 נקודות!
תהא

$$A=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 & -1 & 3\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה ותהא

$$E=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 1 & -3 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

המטריצה שמדרגת אותה (ע"י פעולות שורה אלמנטריות) לצורה קנונית

$$U=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

כלומר $EA=U$

(א) מצאו פתרון פרטי שונה מ 0 למערכת $Ax=0$.
פתרון: כיוון שפתרונות של מערכת לא משתנים בדירוג הפתרונות של $Ux=0$ זההים לפתרונות של $Ax=0$. הפתרונות של $Ux=0$ הם (המשתנה החופשי הוא המשתנה האחרון)

$$\left\{\begin{pmatrix} -t\\ -2t\\ 0\\ t\\ t \end{pmatrix} : t\in\mathbb{R}\right\}$$

(ב) מצאו פתרון פרטי שונה מ 0 למערכת $A^tx=0$.
פתרון: נשחלף את השיוון $EA=U$ ונקבל $A^tE^t=(EA)^t=U^t$ לכן

$$0=C_5(U^t)=C_5(A^tE^t)=A^tC_5(E^t)$$

כאשר המעברים מסתבכים על כפל עמודה. לכן $C_5(E^t)=\begin{pmatrix} 1\\ -3\\ 1\\ 0\\ -1 \end{pmatrix}=v$ הוא פתרון למערכת $A^tx=0$.

(ג) מצאו את כל הפתרונות למערכת $Ex = 0$.

פתרון: המטריצה E הפיכה כמכפלה של מטריצות אלמנטריות (שהפיכות) ולכן הפתרון היחידי למערכת $Ex = 0$ הוא $x = 0$.

הרחבה: 0 מקיים $E0 = 0$ לכן הוא פתרון למערכת הנתונה. בנוסף אם v פתרון למערכת, כלומר $Ev = 0$ נקבל ע"י הכפלה ב E^{-1} משמאל כי $v = 0$. לכן 0 פתרון יחיד.

המשך תשובה לשאלה 3

המשך תשובה לשאלה ___

המשך תשובה לשאלה___