<u>פתרון תרגיל 8</u>

<u>שאלה 1</u>

עבור סדרות הפונקציות הבאות מצאו את פונקצית הגבול (אם היא קיימת), וקבעו אם ההתכנסות היא נקודתית או במידה שווה.

א. $f_n(x)=\cos^{2n}(x)$ בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

ב. $f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}$ ב R.

ג. $f_n(x)=\frac{1}{nx+1}$ בקטע $(0,\infty)$.

ד. $f_n(x)=x^n(1-x^n)$ בקטע $[0,1]$.

<u>פתרון שאלה 1</u>

<u>סעיף א</u>

בקטע $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ מתקיים $0\le\cos^2 x\le 1$. בקטע הנ"ל ללא $x=0$ מתקיים $0\le\cos^2 x<1$.

נקבל עבור $x=0$: $f_n(0)=\cos^{2n}(0)=1^{2n}=1\xrightarrow{n\to\infty}1$.

עבור $x\neq 0$ מכיוון ש $0\le\cos^2 x<1$: $f_n(x)=\cos^{2n}(x)=\left(\cos^2 x\right)^n\xrightarrow{n\to\infty}0$.

נקבל שפונקצית הגבול היא $f(x)=\begin{cases}0 & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$.

קיבלנו סדרת פונקציות רציפות שמתכנסת לפונקציה לא רציפה ולכן זאת התכנסות נקודתי ולא התכנסות במידה שווה.

<u>סעיף ב</u>

$f_n(x)=\frac{\arctan x}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל

$\sup_{x\in R}\left\{\frac{\arctan x}{n}-0\right\}=\frac{\pi}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}0$ וההתכנסות היא במ"ש.

<u>סעיף ג</u>

$f_n(x)=\frac{1}{nx+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל

$\sup_{x\in(0,\infty)}\left\{\frac{1}{nx+1}-0\right\}=1\xrightarrow{n\to\infty}\neq 0$ וההתכנסות היא אינה במ"ש.

<u>סעיף ד</u>

$f_n(x)=x^n(1-x^n)\xrightarrow{n\to\infty}0$ ופונקצית הגבול היא $f(x)=0$.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל $\sup_{x\in[0,1]}\left\{x^n(1-x^n)-0\right\}$

הפונקציה $f(x)=x^n-x^{2n}$ רציפה בקטע הסגור $[0,1]$ ולכן מקבלת בקטע מקסימום.

$f'(x)=nx^{n-1}-2nx^{2n-1}\Rightarrow nx^{n-1}(1-2x^n)=0$ הנגזרת מתאפסת ב $x=\frac{1}{\sqrt[n]{2}}$

$f_n\left(\frac{1}{\sqrt[n]{2}}\right)=\frac{1}{4};f_n(0)=0;f_n(1)=0$ המקסימום לכל n טבעי הוא $\frac{1}{4}\neq 0$ וההתכנסות היא לא במידה שווה.

שאלה 2

הוכיחו או הפריכו את הטענה הבאה:

אם $f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $f(x)$ בקטע I אזי $g(x)f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $g(x)f(x)$.

פתרון שאלה 2

לא נכון. נבחר $f_n(x)=\frac{1}{n}$ בקטע $(0,1)$ שזאת סדרה שמתכנסת במידה שווה ל 0 ונבחר $g(x)=\frac{1}{x}$ אז $g(x)f_n(x)=\frac{1}{nx}$ לא מתכנס במידה שווה.

נבדוק האם ההתכנסות היא במ"ש בעזרת מבחן $\lim-\sup$ ונקבל $\sup\limits_{x\in(0,1)}\left\{\frac{1}{nx}-0\right\}=\infty\neq 0$.

שאלה 3

החליטו אם טורי הפונקציות הבאים מתכנסים נקודתית, במ"ש או מתבדרים בתחומים הנתונים:

א. $\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)$ בתחום $(-a,a)$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{e^{nx}}$ בתחום $[0,\infty)$.

ג. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$ בתחום $[0,\infty)$.

פתרון שאלה 3

סעיף א

נוכיח תחילה ש $\ln(1+x)\le x$ בתחום $[0,\infty)$.

נחקור את הפונקציה $f(x)=x-\ln(1+x)\Leftarrow f'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}$ ז"א הנגזרת חיובית לכל x בתחום $[0,\infty)$. $f(0)=0$ ואז $f(x)\ge 0$ לכל x בתחום $[0,\infty)$.

סה"כ נקבל ש $\ln\left(1+\frac{x^2}{n\ln^2 n}\right)\le\frac{x^2}{n\ln^2 n}\le\frac{a^2}{n\ln^2 n}$.

ממבחן העיבוי נקבל שהטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{a^2}{n\ln^2 n}$ מתכנס ולכן טור הפונקציות שלנו מתכנס במ"ש בקטע לפי מבחן ה M של ויירשטראס.

סעיף ב

ננסה למצוא מקסימום לפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{e^{nx}}$. אם נגזור נקבל $f'(x)=\frac{2xe^{nx}-nx^2e^{nx}}{e^{2nx}}$.

נשווה לאפס ונקבל ש $2x-nx^2=0\Leftarrow x=0,x=\frac{2}{n}$.

$f'(x)=\frac{2x-nx^2}{e^{nx}}$ נגזור פעם שנייה את המונה בלב כדי לבחון חיוביות נגזרת שנייה בנקודה קריטית

ונקבל $2-2nx$ ועבור $x=\frac{2}{n}$ נקבל שהנגזרת השנייה שלילית ז"א שעבור $x=\frac{2}{n}$ ערך הפונקציה הוא מקסימאלי (מכיוון שהפונקציה רציפה ואין נקודות קיצון נוספות).

$\frac{x^2}{e^{nx}}\le\frac{4}{n^2e^2}$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2e^2}$ מתכנס, טור הפונקציות מתכנס במ"ש לפי מבחן ה M של ויירשטראס.

סעיף ג

נשים לב שאם $x>0$ אז $\frac{1}{1+x^2}<1$ ולכן $\frac{1}{x} = x\cdot\frac{\frac{1}{1+x^2}}{1-\frac{1}{1+x^2}} = x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(1+x^2)^n}$.

הטור מתכנס נקודתית ל $\frac{1}{x}$ כאשר $x>0$.

כאשר $x=0$ הטור מתכנס נקודתית ל 0. סה"כ הטור מתכנס נקודתית לפונקציה

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}.$$

היות והפונקציות $\frac{x}{(1+x^2)^n}$ רציפות והן מתכנסות נקודתית לפונקציה לא רציפה, ההתכנסות לא במ"ש.

<u>שאלה 4</u>

א. חשב וציין את תחום ההתכנסות $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}$.

ב. חשבו את סכום הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}$.

<u>פתרון שאלה 4</u>

<u>סעיף א</u>

תחום ההתכנסות של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}$. נשתמש במבחן השורש $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|nx^{n+2}|}=|x|$.

תחום ההתכנסות הוא $-1<x<1$. נשים לב שאם נציב $x=1, x=-1$ נקבל טור מתבדר.

בתחום ההתכנסות הטור מתכנס בהחלט, ולכן ניתן לשנות את סדר האיברים.

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[(n+3)x^{n+2}-3x^{n+2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n+2}-3\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}.$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(n+3)x^{n+2}=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+3}=\frac{x^4}{1-x}\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}(n+3)x^{n+2}=\frac{4x^3-3x^4}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^3}{1-x}.$$

סה"כ נקבל ש $\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n+2}=\frac{4x^3-3x^4}{(1-x)^2}-\frac{3x^3}{1-x}=\frac{x^3}{(1-x)^2}$.

<u>סעיף ב</u>

נסתכל על הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}\cdot x^n$ בתחום $\left[\frac{1}{6},\frac{5}{6}\right]$ ונמצא נוסחה לסכומו. נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל את הדרוש.

מחישוב סכום סדרה הנדסית אינסופית $\sum_{n=0}^{\infty}t^n=\frac{1}{1-t}$.

ההתכנסות בתחום הנ"ל היא במידה שווה, ולכן נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x t^n dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$.

כלומר: $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^{n+1}=-\ln(1-x)$ ולכן $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}x^n=\frac{-\ln(1-x)}{x}$.

טור הנגזרות הוא $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}$ והוא מתכנס במידה שווה בקטע המדובר ולכן

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}=-\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)'=\frac{1}{(1-x)x}+\frac{\ln(1-x)}{x^2}$ כלומר $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{\ln(1-x)}{x}$

נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}=2+2\ln\frac{1}{2}$.

שאלה 5

עבור הטורים הבאים קבע לאילו ערכי x הטור מתכנס בתנאי\בהחלט

א. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$.

ב. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)}$.

פתרון שאלה 5

סעיף א

עבור $x>0$: $\frac{1-x}{1+x}=\frac{1+x-2x}{1+x}=1-\frac{2x}{1+x}\Rightarrow\frac{1-x}{1+x}<1$

$\frac{1-x}{1+x}=\frac{-1-x+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}\Rightarrow -1<\frac{1-x}{1+x}$.

סה"כ קיבלנו ש $-1<\frac{1-x}{1+x}<1$. הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$ מתכנס כטור גיאומטרי.

מכיוון ש $\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|\le\left|\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|$ נקבל שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|$ מתכנס.

ז"א הטור שלנו מתכנס בהחלט.

עבור $x<0$: $\frac{1-x}{1+x}=\frac{-1-x+2}{1+x}=-1+\frac{2}{1+x}$.

אם $-1<x<0$: $-1+\frac{2}{1+x}>1$ עבור $x<-1$ $-1+\frac{2}{1+x}<-1$.

סה"כ נקבל $\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$. $\sqrt[n]{\left|\frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n\right|}\xrightarrow{n\to\infty}\left|\frac{1-x}{1+x}\right|>1$ וממבחן השורש הטור מתבדר.

עבור $x=0$: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}$ הטור מתכנס בתנאי. על פי לייבניץ.

סעיף ב

$$a_n=\frac{x^n}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)},\ a_{n+1}=\frac{x^{n+1}}{(1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^n)(1+x^{n+1})}\Rightarrow\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\left|\frac{x}{1+x^{n+1}}\right|$$

סה"כ נקבל שלכל $x\ne-1$ $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|<1$ ולכן הטור מתכנס בהחלט לכל $x\ne-1$.

שאלה 6:

נניח בשלילה כי f_n מתכנסת במ"ש ב (a,b) ונוכיח שהיא מתנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון. לפי ההנחה שלנו

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

אבל נשים לב ש

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| = \max\{\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)|, |f_n(a) - f(a)|, f_n(b) - f(b)|\}$$

נשים לב שכאשר $n\to\infty$ מתקיים ש

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(a,b)} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(a) - f(a)| = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(b) - f(b)| = 0$$

(הראשון מהתכנסות במ"ש ב (a,b), והשני והשלישי מהתכנסות נקודתית ב $[a,b]$) ולכן

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f_n(x)-f(x)| = \lim_{n\to\infty} \max\{\sup_{x\in(a,b)} |f_n(x)-f(x)|, |f_n(a)-f(a)|, f_n(b)-f(b)|\} = 0$$

כלומר סדרת הפונקציות מתכנסת במ"ש ב $[a,b]$ בסתירה לנתון.

שאלה 7:

סעיף 1

אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I ו $g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)$ בקטע I אז $f_n(x)+g_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)+g(x)$ בקטע I

נכון. יהי $\epsilon>0$ ידוע כי קיים N_1 כך שלכל $n>N_1$ ו $x\in I$ מתקיים

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

וקיים N_2 כך שלכל $n>N_2$ ולכל $x\in I$ מתקיים

$$|g_n(x) - g(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

ולכן אם ניקח $N=\max\{N_1,N_2\}$ יתקיים שלכל $n>N$ ולכל $x\in I$

$$|f_n(x) + g_n(x) - f(x) - g(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |g_n(x) - g(x)| \leq \epsilon$$

סעיף ב

אם $f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $f(x)$ בקטע I אז $g(x)f_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $g(x)f(x)$ בקטע I

לא נכון. נבחר $\frac{1}{n}$ = $f_n(x)$ בקטע $(0,1)$ שזאת סדרה שמתכנסת במ"ש ל 0 ונבחר $g(x) = \frac{1}{x}$ אז $f_n(x)g(x) = \frac{1}{nx}$ לא מתכנס במ"ש ל 0 בקטע $(0,1)$
(קל לראות לפי $\lim - \sup$)

סעיף ג

אם הטור $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במידה שווה ל $S(x)$ בקטע I אז הסדרה $f_n(x)$ מתכנסת במידה שווה ל 0 בקטע I.

נכון.

נגדיר $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ לפי הנתון $S_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל $S(x)$ ולכן גם $S_{n-1}(x)$ מתכנסת במ"ש ל $S(x)$. לכן $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$ מתכנסת במ"ש (לפי סעיף א') ל $S(x) - S(x) = 0$ כנדרש.

סעיף ד

יהי $\epsilon > 0$. צריך למצוא $\delta > 0$ כך ש

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

ידוע כי קיים n_0 כך שלכל $n > n_0$ ו $x \in I$ מתקיים ש

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\epsilon}{3}$$

לפי הרציפות במ"ש של f_n, ידוע כי יש $\delta > 0$ עבורו מתקיים

$$|x-y| \leq \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \frac{\epsilon}{3}$$

עבור δזה באמת יתקיים שאם $|x-y| \leq \delta$ אז

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(y)| + |f_n(y) + f(y)| < \epsilon$$

כנדרש.