בס"ד

אוניברסיטת בר-אילן
מבחן בקורס אלגברה מופשטת 1 (סמסטר קיץ)
מס' : 05/07 -88-211
המרצים: מיכאל מגרל ו רוני ביתן
תאריך: 31.08.09
מועד א'
חומר עזר: רק מחשבון
משך המבחן: שעתיים

פתרון המבחן

שאלה 1.

הוכח או הפרך:

א. *קיים מונויד M המכיל איבר הפיך מימין אבל לא משמאל.*

כן. במנויד $M := \left(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ\right)$, $h \circ f = 1_N, f \circ h \neq 1_N$ $h := \begin{pmatrix} 1 2 3 \cdots & n \cdots \\ 1 1 2 \cdots n-1 \cdots \end{pmatrix}$ $f := \begin{pmatrix} 1 2 3 \cdots & n \cdots \\ 2 3 4 \cdots n+1 \cdots \end{pmatrix}$

הערה: מה שחשוב כאן ש h היא על אבל לא חח"ע (ו f חח"ע אבל לא על).

<u>דוגמה נוספת</u>: במונואיד: $M = \left\{f : [0,1] \to [0,1]\right\}$ הפונקציה: $f(x) = \begin{cases} 2x & 0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} < x \le 1 \end{cases}$ היא הפיכה

מימין. יחד עם $g(x) = x/2$ נקבל: $(f \circ g)(x) = x$ $\forall x \in [0,1]:$ כלומר: $f \circ g = id$ אבל אין ל- f

הופכי שמאלי שכן אם f תהיה ראשונה היא תאבד את המידע של קלטים $\frac{1}{2} < x \le 1$ ולא ניתן יהיה

לשחזרם.

ב. *קיים מונויד אינסופי כך שכל איבר שלו הוא אידמפוטנט (ז"א $a^2 = a$) .*

כן, למשל במונויד $\left(P(\mathbb{N}), \bigcap\right)$ (קבוצת החזקה P = קבוצת כל תתי הקבוצות).

ג. *כל מונויד סופי עם תכונת הצמצום הוא חבורה.*

כן. יהא M מונואיד סופי ויהא a איבר בו. אם נתבונן בחזקות חיוביות של a, כיוון ש- M הוא סופי, באיזשהו שלב אנו נחזור על עצמנו, כלומר: $\exists i, j \in \mathbb{N}, i > j : a^i = a^j$. מכח הצמצום נקבל: $a^{i-j} = e$ ומכאן ש: $a^{i-j-1} \cdot a = a \cdot a^{i-j-1} = e$. כלומר: $a^{-1} = a^{i-j-1}$ והאיבר הזה שייך למונואיד מתכונת הסגירות. זה נכון לכל איבר ולכן כולם הפיכים והמונואיד הוא חבורה.

דרך אחרת: ניתן לצמצם ב $a \in M$ משמאל לכן הזזה שמאלית $l_a : M \to M, l_a(x) = ax$ היא חח"ע.

זה גורר ש l_a גם על כי M **סופית**. אם כן קיים $x \in M$ כך ש $ax = e$.

באופן דומה (צמצום מימין) קיים $y \in M$ כך ש $ya = e$ ואז קל לבדוק ש: $x = y$.

שאלה 2.

נגדיר דרגה של חבורה כמספר האיברים המינימלי בה שיוצרים יחד את כל החבורה.

הוכח או הפרך:

א. קיימת חבורה G ות"ח H עם $rank(H) = 3,\ rank(G) = 2$.

כן. למשל: $G = S_6$ היא בעלת דרגה 2 (זה נכון לכל S_n הוראה בתרגול), אבל

$H = \langle (12),(34),(56) \rangle \le G$ היא בעלת דרגה 3.

ב. כל חבורה אבלית G עם $rank(G) = n$ היא תמונה אפימורפית של $\mathbb{Z}^m$ לכל $m \ge n$.

כן. נניח $G = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle$ ונגדיר העתקה: $f : (\mathbb{Z}^m, +) \to (G, \cdot)$ ע"י:

$$(k_1, k_2, .., k_m) \mapsto a_1^{k_1} \cdot a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n}$$

כיוון ש- G אבלית ניתן לשנות את סדר המכפלה בתמונה כרצוננו ולקבל:

$$f\left(\overline{k^1} + \overline{k^2}\right) = f\left(\overline{k^1}\right) \cdot f\left(\overline{k^2}\right)$$

(כאשר $\bar{k}$ מסמן וקטור) כלומר f הומומורפיזם. כיוון שניתן במקור להכניס כל חזקה שלמה, ומשום ש:

$G = \langle a_1, a_2, ..., a_n \rangle = \left\{ a_1^{k_1} \cdot a_1^{k_1} \cdots a_n^{k_n} \mid k_i \in \mathbb{Z} \right\}$, הפונקציה f היא על.

ג. מהי הדרגה של החבורה: $\mathbf{GL}_2(\mathbb{Z}_2)$? הוכח את קביעתך.

בתוך כל מטריצה $A \in Mat_2(\mathbb{Z}_2)$ ישנם ארבע כניסות בעלי ערך 0 או 1 כל אחת.

המטריצות ההפיכות הן אלו עם דטרמיננטה שונה מאפס (כאן בהכרח שווה לאחד).

ישנן 6 אפשרויות: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

חבורה בת 6 איברים היא איזומורפית ל- C_6 או ל- D_3. במקרה שלנו קל לראות כי החבורה אינה

קומוטטיבית. לכן היא איזומורפית ל- D_3 ומכאן שדרגתה היא 2.

שאלה 3.

א. עבור כל אחד מהסעיפים הבאים הוכח או הפרך:

<u>כל</u> חבורה מהסדר הנתון היא אבלית:

1. 15   2. 16   3. 17.

1. עבור סדר 15: נספור בעזרת משפט סילו-3 כמה ת"ח 3-סילו וכמה 5-סילו ישנן:

$$n_3 = 1+3k_3\big|_5 = 1,\ \ n_5 = 1+5k_5\big|_3 = 1 .$$

התת-חבורות הללו הן נורמליות. כיוון שסדרהן ראשוניים,הן ציקליות: $H_3 = \langle a \rangle, H_5 = \langle b \rangle$.

נשים לב כי סדרי תתי-החבורות זרים זה לזה ולכן: $H_3 \cap H_5 = \{e\}$. מכאן: בקבוצה

$\{a^i b^j \mid 0 \le i \le 2, 0 \le j \le 4\}$ כל האיברים שונים לכן ברשימה 15 איברים (כל משיש ב G).

נקבל $G = H_3 H_5$. לפי משפט הפירוק $G \cong H_3 \times H_5$ מכפלה ישרה של חבורות ציקליות. הסדרים זרים לכן G גם ציקלית (ולכן אבלית).

<u>דרך אחרת</u>: נתבונן באיבר: $ab \in G$. עפ"י מש' Lagrange ': $|ab| \in \{1,3,5,15\}$.

כיוון ש: $H_3 \cap H_5 = \{e\}$, נקבל:

- $|ab| \ne 1$ שכן לא יתכן ש: $a = b^{-1}$.
- $|ab| \ne 3$ שכן $ab \notin H_3$ ויש רק תת-חבורה אחת מסדר 3.
- $|ab| \ne 5$ מאותה סיבה הנ"ל.

מכאן שבהכרח: $|ab| = 15$ כלומר $G = \langle ab \rangle$ ציקלית ולכן אבלית.

2. עבור הסדר 16: לא בהכרח אבלית: למשל D_8 היא מסדר 16 ואינה אבלית.
3. עבור הסדר 17: כל חבורה מסדר ראשוני היא ציקלית (ע"פ תוצאה של מש' Lagrange).

ב. *הוכח כי החבורה S_4 היא פתירה.*

כל ת"ח מאינדקס 2 היא נורמלית. מכאן ש: $A_4 \lhd S_4$.

נתבונן בתת-החבורה: $H = \{id,(12)(34),(13)(24),(14)(23)\}$.

כיוון שהצמדה שומרת את המבנה, תת-החבורה הזו היא נורמלית:

$$\forall g \in A_4, h \in H:\ ghg^{-1} \in H .$$

נקבל אם כן את הסדרה הנורמלית: $S_4 \rhd A_4 \rhd H \rhd \{id\}$.

נשים לב כי H אבלית (איזומורפית ל- $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$). שאר המנות של ת"ח עוקבות בסדרה הן מסדרים ראשוניים 3, 2 ולכן ציקליות ולפיכך גם כן אבליות. מכאן ש- S_4 פתירה.

ג. *הוכח או הפרך: קיימת חבורה אינסופית G כך שלכל תת קבוצה סופית $A = \{a_1, \cdots a_n\} \subset G$, תת-החבורה $\langle A \rangle$ הנוצרת ע"י A היא סופית.*

כן. לדוגמה בחבורה האינסופית $\mathbb{Z}_2^{\mathbb{N}}$ עם חיבור מודולו 2 בכל מרכיב, כל איבר הוא מסדר 2 לכל היותר (ווקטור האפס הוא מסדר 1). לכן כל קבוצה סופית של איברים כאלו יוצרת בהכרח חבורה סופית.

<u>דוגמה נוספת</u>: אוסף כל שורשי היחידה: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \left\{ z\in\mathbb{C}^* \mid \exists\, n\in\mathbb{N} : z^n = 1 \right\}$.

שאלה 4.

(חבורת Heisenberg) מעל הקבוצה $H := \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ נגדיר פעולה:

$$(x_1,x_2,x_3)\bullet(y_1,y_2,y_3) := (x_1+y_1+x_3y_2,\, x_2+y_2,\, x_3+y_3)$$

א. הוכח ש $(H,\bullet)$ היא חבורה והיא פתירה.

אפשר לפתור קודם את הסעיף הבא ובעזרתו לענות על סעיף זה.

ב. הוכח שהיא איזומורפית לחבורת מטריצות הבאה: $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;\; a,b,c\in\mathbb{R} \right\}$.

$G \le GL_2(\mathbb{R})$. יש סגירות. היחידה שייכת $(a=b=c=0)$. כמו כן: $g^{-1} = \begin{pmatrix} 1-a & ab-c \\ 0 & 1 & -b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$.

נגדיר את ההעתקה: $f : H \to G$ ע"י: $f\left(x_1,x_2,x_3\right) = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ברור שהיא חח"ע ועל.

נקבל גם שהפעולה נשמרת:

$$f\left(\left(x_1,x_2,x_3\right)\right)\cdot f\left(\left(y_1,y_2,y_3\right)\right) = \begin{pmatrix} 1 & x_3 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & y_3 & y_1 \\ 0 & 1 & y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_3+y_3 & x_1+y_1+x_3y_2 \\ 0 & 1 & x_2+y_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= f\left(\left(x_1,x_2,x_3\right)\bullet\left(y_1,y_2,y_3\right)\right)$$

לכן נוכל להסיק כי מבנה אלגברי $(H,\bullet)$ חבורה כתמונה איזומורפית של חבורה $(G,\cdot)$.

כעת נחזור לסעיף א'. נותר להראות כי G פתירה. לצורך כך נחשב את הנגזרת שלה.

נשים לב כי: $\forall A,B\in G : \left[A,B\right] = ABA^{-1}B^{-1} = \begin{pmatrix} 1\;0\;x \\ 0\;1\;0 \\ 0\;0\;1 \end{pmatrix}$ כאשר x הוא מספר ממשי כלשהו.

אם כן קל לראות כי: $G' = \left\langle \left[A,B\right] \right\rangle$ היא אבלית שכן היא איזומורפית לחבורת הממשיים:

$$\forall x,y\in\mathbb{R}: \begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&x+y\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&y\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&x\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

לפיכך $G''=\{e\}$ ונקבל את הסדרה: $G\triangleright G'\triangleright G''=\{e\}$. כלומר G פתירה וכמותה גם H.

ג. *מצא תת-חבורה לא נורמלית של H.*

תת-החבורה $K=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&x\\0&0&1\end{pmatrix} : x\in\mathbb{R}\right\}$ אינה נורמלית. לדוגמה:

$$gkg^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-2&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\notin K$$

לכן $H\ \le\{(0,x,0)\in H\mid x\in\mathbb{R}\}$ היא תת חבורה לא נורמלית ב H.

ד. *מצא תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית (לא היחידה ולא H) של H.*

לדוגמא אפשר לקחת את G' שחישבנו למעלה (תכונה בסיסית: $G'\triangleleft G$). היא מתאימה לתת חבורה $\{(x,0,0)\in H\mid x\in\mathbb{R}\}\triangleleft H$.

שאלה 5.

א. *תאר תמונות אפימורפיות של חבורת האוילר: U_{71}.*

סדר חבורת אוילר הוא מספר אוילר. במקרה שלנו 71 הוא מספר ראשוני ולכן:

$|U_{71}|=\varphi(71)=70=2\cdot5\cdot7$.

כיוון שחזקות כל הראשוניים בפירוק הוא 1 האפשרות היחידה לחבורה אבלית היא זו הציקלית.
כלומר: $U_{71}\simeq\mathbb{Z}_{70}$. עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון ניתן למיין את התמונות האפימורפיות על פי הגרעינים האפשריים של אפימורפיזמים מ-$\mathbb{Z}_{70}$. בחבורה אבלית כל ת"ח היא נורמלית. כמו כן בחבורה ציקלית לכל מספר המחלק את סדר החבורה קיימת תת-חבורה יחידה מסדר זה (משפט).
כלומר תתי-החבורות הן מסדרים: $n=1,2,5,7,10,14,35,70$ ובהתאם לכך המנות הן חבורות ציקליות מהסדרים: $\left|\mathbb{Z}_{70}/\mathbb{Z}_n\right|=\frac{70}{n}=70,35,14,10,7,5,2,1$.

ב. *הראה מונומורפיזם: $\Omega_{10}\times C_{15}\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.*

תחילה נראה כי: $\varphi:\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\simeq\mathbb{T}^2$ כאשר: $\mathbb{T}$ הוא $\{z\in\mathbb{C}:|z|=1\}$ ("מעגל היחידה").

נגדיר: $\varphi(m,n)=\left(e^{2\pi im},e^{2\pi in}\right)$. קל לראות שהו הומומורפיזם וגם על.

נחשב את הגרעין: $\ker(\varphi)=\left\{(m,n):\left(e^{2\pi im},e^{2\pi in}\right)=(1,1)\right\}=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}=\mathbb{Z}^2$.

על כן עפ"י משפט האיזומורפיזם הראשון מתקבל האיזומורפיזם הנ"ל.

בגלל $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2\simeq\mathbb{T}^2$ מספיק לשכן $\Omega_{10}\times C_{15}$ לתוך $\mathbb{T}^2$.

כעת נשים לב כי Ω_{10} משוכן באופן טבעי ע"י הזהות בתוך $\mathbb{T}$.

לגבי הגורם השני, נכתוב: $C_{15}=\left\langle a \mid a^{15}=1\right\rangle$ ונגדיר: $f:C_{15}\to\mathbb{T}$ ע"י: $f\left(a^j\right)=e^{\frac{2\pi ij}{15}}$.

מההעתקה: $\psi:=(id,f):\Omega_{10}\times C_{15}\to\mathbb{T}^2$ היא מונומורפיזם.

כעת נותר להרכיב: $\varphi^{-1}\circ\psi:\Omega_{10}\times C_{15}\to\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$.

ג. *מצא מספר אוטומורפיזמים של החבורה $U_7\times C_{25}$.*

תחילה נשים לב כי: $|U_7|=\varphi(7)=6$. יש רק חבורה אחת אבלית עם שישה איברים (עד כדי איזומורפיזם) והיא $\mathbb{Z}_6$. כמו כן ברור כי: $C_{25}\simeq\mathbb{Z}_{25}$.

כיוון ש: $\gcd(6,25)=1$ נקבל: $U_7\times C_{25}\simeq\mathbb{Z}_6\times\mathbb{Z}_{25}\simeq\mathbb{Z}_{150}$. מכאן:

$$\left|Aut\left(U_7\times C_{25}\right)\right|=\left|U_{150}\right|=\varphi(150)=\varphi\left(2\cdot3\cdot5^2\right)=\varphi(2)\cdot\varphi(3)\cdot\varphi\left(5^2\right)=1\cdot2\cdot20=40.$$

ד. *מצא מספר חבורות אבליות (לא איזומורפיות) מסדר 3600.*

בכמה מהן יש ת"ח 5-סילו ציקלית ?

נכתוב: $3600=2^4\cdot3^2\cdot5^2$. לפיכך מספר החבורות האבליות הוא:

$$\rho(4)\cdot\rho(2)\cdot\rho(2)=5\cdot2\cdot2=20.$$

האפשרות שחבורת 5-סילו תהיה ציקלית היא אחת משתיים עבור חבורה בת 5^2 איברים.

על כן במקרה שלנו חצי מתוך האפשרויות הנ"ל, $\rho(4)\cdot\rho(2)=10$ במספר, הן כאלו.

ה. *כמה מחלקות צמידות יש בחבורה S_6 ?*

מה שמאפיין תמורות באותה מחלקת צמידות ב-S_6 הוא המבנה (טיפוס).

על כן השאלה היא כמה מבנים שונים באורך 6 קיימים:

$$(6),(5,1),(4,2),(4,1,1),(3,3),(3,2,1),(3,1,1,1),(2,2,2),(2,2,1,1),(2,1,1,1,1),(1,1,1,1,1,1)$$

כלומר התשובה היא: $\rho(6)=11$.

שאלה 6.

א. הוכח את משפט Burnside (על מספר מסלולים).

ב. מצא כמה לוחות לא שקולים (עד כדי סימטריות של הריבוע) קיימים אם מותר לצבוע (באופן אחיד משני הצדדים) ב- 2 צבעים נתונים והגודל של הלוח הוא 3×3.

א. ראה בהרצאה.

ב. נגדיר את מרחב הפעולה ככל הצביעות האפשריות של הלוח: $X=\left\{f:\{1,..,9\}\to\{0,1\}\right\}$.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

נפעיל עליו את החבורה הדיהדרלית: $D_4=\left\langle a,b \,\middle|\, a^4=1, b^2=1, ab=ba^3\right\rangle$.

האיבר a מסובב ב- 90° את הלוח ולפיכך מתקבלת התמורה:

$$a=\begin{pmatrix}123456789\\369258147\end{pmatrix}=(1397)(2684)(5)$$

(אפשר גם לקבל צורה אחרת מקבילה של a - תלוי באיזה כיוון בוחרים לסובב).

אם כן: $a^2=(19)(37)(28)(64)(5)$ ו- $a^3=a^{-1}$ הוא בעל אותו מבנה כמו של a.

השיקוף b מבוטא ע"י: $b=\begin{pmatrix}123456789\\321654987\end{pmatrix}=(13)(46)(79)(2)(5)(8)$.

ניעזר בטבלה הבאה לסכם את מספר נקודות השבת של X לכל איבר ב- D_4:

$g\in D_4$	$\left\|X_g\right\|$	סה"כ
id	2^9	2^9
a,a^3	2^3	$2\cdot 2^3$
a^2	2^5	2^5
b,ab,a^3b,a^2b	2^6	$4\cdot 2^6$

עפ"י משפט Burnside מספר המסלולים = מחלקות שקילות הוא:

$$k=\frac{1}{|D_4|}\sum_{g\in D_4}\left|X_g\right|=\tfrac{1}{8}\left(2^9+2\cdot 2^3+2^5+4\cdot 2^6\right)=102$$