תורת הקבוצות — תרגיל בית 4

חיים שרגא רוזנר

י"א באייר, תשע"ה*

תקציר

איזומורפיזם סדר, חיבור סודרים, כפל סודרים, מונוטוניות ורציפות (נדחה לתרגיל בית 5).

תזכורות

1. **חיבור סודרים**: יהיו α, β סודרים. נגדיר את **הסכום הזר** שלהם

$$\alpha \uplus \beta \coloneqq \{0\} \times \alpha \cup \{1\} \times \beta$$

ניתן להגדיר, באופן טבעי, סדר מילוני על קבוצה זו.[1] הקבוצה $\alpha \uplus \beta$ סדורה היטב על פי סדר זה, וקיים סודר אחד ויחיד אליו הקבוצה איזומורפית. נסמן סודר זה $\alpha + \beta$. חיבור סודרים איננו חילופי (קומוטטיבי).

2. **חיסור סודרים**: יהיו $\alpha \leq \beta$. נגדיר חיסור סודרים $\beta - \alpha \coloneqq \operatorname{type}(\beta \setminus \alpha)$. מתקיימות התכונות הבאות (לפי תרגיל בית 3):

(א) $\alpha + (\beta - \alpha) = \beta$.

(ב) $\alpha = \beta \iff \beta - \alpha = 0$.

(ג) $\alpha < \beta \iff \beta - \alpha > 0$.

3. **כפל סודרים**: יהיו α, β סודרים. אזי מכפלתם מוגדרת

$$\alpha \cdot \beta \coloneqq \operatorname{type}\left(\beta \times \alpha, <_{\mathrm{lex}}\right)$$

דהיינו $\alpha \cdot \beta$ היא טיפוס הסדר של $\beta \times \alpha$ כאשר קבוצה זו מסודרת על ידי הסדר המילוני.

1 איזומורפיזם סדר ורישאות

1. הוכיחו כי קבוצה סדורה היטב אינה איזומורפית לאף רישא־ממש של עצמה. מצאו קבוצה A סדורה סדר מלא שהיא איזומורפית סדר לרישא־ממש של עצמה.

* להגשה עד יום **שני** ט"ו באייר (4 מאי) לתא מספר 45 בתאי המילגאים של המחלקה למתמטיקה.

[1] הכוונה היא לסדר המושרה מהסדר המילוני על $2 \times (\alpha \cup \beta)$.

2 חיבור סודרים

1. אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$. הוכיחו גם את הכיוון השני, אם $\alpha+\beta_1 < \alpha+\beta_2$ אז $\beta_1 < \beta_2$.
2. בשיעור הראינו כי אם β גבולי, אז $\alpha + \beta$ גבולי. הראו כי אם β עוקב, אז $\alpha + \beta$ עוקב.
3. הפרך, על ידי דוגמאות נגדיות, כל אחת מהטענות הבאות:
   (א) אם $\beta > 0$ אז $\alpha < \beta + \alpha$.
   (ב) אם $\beta_1 < \beta_2$, אז $\beta_1 + \alpha < \beta_2 + \alpha$.
   (ג) אם β גבולי, אז $\beta + \alpha = \sup\{\gamma + \alpha \, : \, \gamma < \beta\}$.
   (ד) אם β גבולי, אז $\beta + \alpha$ גבולי.
   (ה) אם $\alpha < \beta$ גבוליים אז $\beta + \alpha = \alpha$.

3 כפל סודרים

1. הוכיחו:
   (א) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$.
   (ב) $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$.
   (ג) $\alpha \cdot 2 = \alpha + \alpha$. נא להוכיח במישרין מן ההגדרות, ולא להסתמך על חוק הפילוג.
   (ד) אם β גבולי, $\alpha > 0$, אז $\alpha \cdot \beta$ גבולי.
2. הפריכו:
   (א) $(\beta + \gamma) \cdot \alpha = \beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha$.
   (ב) אם $\beta_1 < \beta_2$ ו־$0 < \alpha$ אז $\beta_1 \cdot \alpha < \beta_2 \cdot \alpha$.
   (ג) $2 \cdot \alpha = \alpha + \alpha$.
   (ד) לכל β גבולי, $\beta \cdot \alpha = \sup\{\gamma \cdot \alpha \colon \gamma < \beta\}$.

4 מונוטוניות ורציפות

(חלק זה נדחה לתרגיל בית 5)

ב ה צ ל ח ה!