תרגיל 1

1. הוכיחו כי בכל מרחב מטרי (X,d) מתקיים:
א. $d(x_1,x_n) \le d(x_1,x_2) + ... + d(x_{n-1},x_n)$ לכל $n \ge 2$.
ב. $|d(x,z) - d(y,z)| \le d(x,y)$.
פתרון:

א. נוכיח באינדוקציה. עבור $n = 2$, ידוע, מהגדרת מטריקה.

נניח נכונות עבור $n = k$, ונוכיח עבור $n = k + 1$. ובכן, $d(x_1,x_{k+1}) \le d(x_1,x_k) + d(x_k,x_{k+1}) \le d(x_1,x_2) + ... + d(x_{k-1},x_k) + d(x_k,x_{k+1})$ (מהנחת האינדוקציה).

ב. שקול להוכיח: $-d(x,y) \le d(x,z) - d(y,z) \le d(x,y)$.

צד ימין נובע מכך ש: $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

צד שמאל נובע מכך ש: $d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z)$.

2. נסמן בX את אוסף כל הסדרות שאיבריהן שייכים לקבוצה $\{1,2...,n\}$, ונגדיר את הפו' הבאה $d : X \times X \to [0,\infty)$ ע"י:

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{\min\{i : x_i \ne y_i\}} & x \ne y \end{cases}.$$

הוכיחו כי d היא אולטרה מטריקה על X.
פתרון:

$(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0$ נובע ישירות מההגדרה.

סימטריות: טירוויאלי.

אי"ש המשולש: יהיו x,y,z 3 סדרות בX. אם שתיים מהן שוות אז האי שוויון טריוויאלי.
אז נניח ש $x \ne y, x \ne z, y \ne z$. נסמן $j = \min\{i : x_i \ne y_i\}, k = \min\{i : y_i \ne z_i\}$.
אז $\min\{i : x_i \ne z_i\} \ge \min\{j,k\}$. הסבר: אם $t < j,k$ אז $x_t = y_t \wedge y_t = z_t \Longrightarrow x_t = z_t$. לכן: $d(x,z) = \dfrac{1}{\min\{i : x_i \ne z_i\}} \le \dfrac{1}{\min\{j,k\}} = \max\{\dfrac{1}{j},\dfrac{1}{k}\} = \max\{d(x,y),d(y,z)\}$.

3. תהי $d : X \times X \to \mathbb{R}$ פו' שמקיימת:
א. $x = y \iff d(x,y) = 0$
ב. $d(y,x) \le d(z,y) + d(z,x)$ לכל $x,y,z \in X$.
הוכיחו שd היא מטריקה על X.
פתרון:

סימטריות: נציב $z = x$. $d(y,x) \le d(x,y) + d(x,x) = d(x,y) + 0 = d(x,y)$.
באופן דומה אפשר להראות ש $d(x,y) \le d(y,x)$. לכן $d(x,y) = d(y,x)$.

סימטריות+ תכונה ב' גורר את אי שוויון המשולש.

כעת, נוכיח ש $d(x,y) \geq 0$. $0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y)$. נחלק ב2 ונקבל את המבוקש.

4. הוכיחו או הפריכו: הפונקציות הבאות הן מטריקות:
א. $d((x,y),(x',y')) = \min\{d(x,x'), d(y,y')\}$ על $\mathbb{R}^2$.
ב. $d((x,y),(x',y')) = |x| + |y| + |x'| + |y'|$ על $\mathbb{R}^2$.
ג. $d((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y')$ על $X \times X$ כאשר (X,d) הוא מרחב מטרי.
פתרון:

א. הפרכה: $(0,1) \neq (0,0)$ אבל $d((0,0),(0,1)) = \min\{0,1\} = 0$.

ב. הפרכה: $(0,1) = (0,1)$ אבל $d((0,1),(0,1)) = 2$.

ג. הוכחה: ראשית, יש להראות שהפו' הולכת לתוך $[0,\infty)$. זה נובע מכך ש $d(x,x'), d(y,y') \geq 0$, וסכום של מספרים אי שליליים הוא אי שלילי.

$d(x,x') + d(y,y') = 0 \iff d((x,y),(x',y')) = 0$. בגלל ש$d$ מטריקה, $d(x,x'), d(y,y') \geq 0$. לכן זה שקול לכך ש $d(x,x') = 0 \wedge d(y,y') = 0$ וזה קורה אמ"ם $x = x' \wedge y = y'$. כלומר $(x,y) = (x',y')$.

סימטריות: $d((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') = d(x',x) + d(y',y) = d((x',y'),(x,y))$.

אי"ש המשולש: $d((x,y),(x',y')) = d(x,x') + d(y,y') \leq d(x,x'') + d(x'',x') + d(y,y'') + d(y'',y') = d((x,y),(x'',y'')) + d((x'',x'),(y'',y'))$.

5. תזכורת: הגדרנו בכיתה את המטריקה הp - אדית באופן הבא: עבור $p \in \mathbb{N}$ ראשוני, מגדירים $k(x,y) = \max\{i : p^i | (x-y)\}$ ו $d_p(x,y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ \dfrac{1}{p^{k(x,y)}} & x \neq y \end{cases}$.
א. הוכיחו: $p^n \to 0$ במטריקה הp- אדית.
ב. תארו את הכדור $B_{d_7}(3, \dfrac{1}{49})$ במרחב $(\mathbb{Z}, d_7)$.
ג. עבור $z \in \mathbb{Z}$ תנו דוגמא לסדרה לא קבועה ששואפת לz במרחב $(\mathbb{Z}, d_3)$.
פתרון:

א. $d_p(p^n, 0) = \dfrac{1}{p^n} \to 0$. לכן $p^n \to 0$

ב. $z \in B(3, \dfrac{1}{49}) \iff d(3,z) \leq \dfrac{1}{49} \iff z = 3 \vee k(3,z) \geq 2 \iff z = 3 \vee z = 3 + 49x$. כלומר, $B(3, \dfrac{1}{49}) = 3 + 49\mathbb{Z}$

6. יהי (X,d) מרחב מטרי, $x_1, x_2 \in X$ ו $r_1, r_2 > 0$, ונניח ש $p \in B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$. נסמן $r = \min\{r_1 - d(x_1,p), r_2 - d(x_2,p)\}$. הוכיחו ש $B(p,r) \subseteq B(x_1,r_1) \cap B(x_2,r_2)$.
פתרון:

יהי $y \in B(p,r)$. כלומר, $d(y,p) \leq r$. מאי שוויון המשולש, $d(y,x_1) \leq d(y,p) + d(p,x_1) \leq r_1 - d(x_1,p) + d(x_1,p) = r_1$. לכן $y \in B(p,r)$. כנ"ל לגבי $B(x_2,r_2)$.

7. תהי $\{x_n\}$ סדרה במרח מטרי (X,d). נאמר ש $\{x_n\}$ קבועה לבסוף, אם יש $x\in X$ ו $n_0\in\mathbb{N}$, כך ש $x_n=x\ \forall n\geq n_0$.
א. הוכיחו שבמרחב מטרי כל סדרה קבועה לבסוף מתכנסת.
ב. הוכיחו שבמרחב עם מטריקת $0-1$ כל סדרה מתכנסת קבועה לבסוף.
פתרון:

א. נזכיר כי במרחב מטרי $x_n\to x$ אמ"ם $d(x_n,x)\to 0$.

ובכן, נוכיח שאם $\{x_n\}$ קבועה לבסוף על x, אז הסדרה מתכנסת לx. אכן, החל ממקום מסויים $d(x_n,x)=d(x,x)=0$. לכן $d(x_n,x)\to 0$.

ב. במטריקה הדיסקרטית המרחקים הם 0 או 1. לכן אם $d(x_n,x)\to 0$, זה אומר שהחל ממקום מסויים $d(x_n,x)=0$. כלומר, $x_n=x$.

8. במרחב l_∞ הראו שהסדרה $x_n=(\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...)$ מתכנסת, ומצאו את גבולה.
פתרון:

נוכיח שהסדרה מתכנסת ל$(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...)$.

הוכחה: $d_\infty((\frac{n+1}{n},\frac{n+2}{2n},\frac{n+3}{3n},...),(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},...))=\sup(\frac{1}{n},\frac{1}{n},\frac{1}{n},...)=\frac{1}{n}\to 0$.

9. נתבונן במרחב (X,d) כאשר X היא קבוצת המספרים האי רציונליים, וd היא המטריקה המושרית מ$\mathbb{R}$.
א. הוכיחו את הטענה הכללית הבאה: אם (M,τ) הוא מרחב מטרי ו (Y,τ_Y) תת מרחב עם המטריקה המושרית, אז לכל $\{x_n\}\subseteq Y$ ו $x\in Y$, $x_n\to x$ לפי τ, אמ"ם $x_n\to x$ לפי τ_Y.
ב. נסתכל על הסדרה $x_n=\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}$. הוכיחו ש $\{x_n\}\subseteq X$.
ג. הוכיחו ש $\{x_n\}$ לא מתכנסת ב X.
פתרון:

א. אם $x_n,x\in Y$, אז $\tau(x_n,x)=\tau_Y(x_n,x)$, מהגדרת המטריקה המושרית. לכן $\tau(x_n,x)\to 0\iff\tau_Y(x_n,x)\to 0$.

ב. נניח בשלילה שקיים n כך ש $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}\in\mathbb{Q}$. כלומר, קיימים $a,b\in\mathbb{Z}$ כך ש $\frac{n+\sqrt{2}}{n-\sqrt{2}}=\frac{a}{b}$. אז $\Leftarrow b(n+\sqrt{2})=a(n-\sqrt{2})$ $\Leftarrow bn+b\sqrt{2}=an-a\sqrt{2}$ $\Leftarrow (b+a)\sqrt{2}=bn-an$ $\sqrt{2}=\frac{bn-an}{b+a}$. כלומר, $\sqrt{2}$ רציונלי, וזאת כמובן סתירה.

ג. נניח ש $x_n\to x$ ב X. אז $x_n\to x$ גם ב $\mathbb{R}$. אבל ידוע ש $x_n\to 1$ ב$\mathbb{R}$. ו$x\neq 1$, כי $1\notin X$. בסתירה ליחידות הגבול במרחב מטרי.

שאלת אתגר: הראו שאם $(X,||\cdot||)$ מרחב נורמי, וd המטריקה המושרית מהנורמה, אז לא קיימים כדורים שונים $B(a_1,r_1),B(a_2r_2)$ כך ש $r_1<r_2$ וגם $B(a_2,r_2)\subseteq B(a_1,r_1)$.
פתרון:

נניח $a_1\neq a_2$ $r_1<r_2$, ונניח בשלילה שמתקיים $B(a_2,r_2)\subset B(a_1,r_1)$. אזי $a_2\in B(a_2,r_2)\subset B(a_1,r_1)$ ולכן $||a_2-a_1||<r_1$. יהי $v=a_1+r_1\frac{a_2-a_1}{||a_2-a_1||}$. מתקיים:

$||v-a_2|| = ||a_1 + r_1\frac{a_2-a_1}{||a_2-a_1||} - a_2|| = ||(a_2-a_1)(\frac{r_1}{||a_2-a_1||}-1)|| =$

$||a_2-a_1||\cdot|\frac{r_1-||a_2-a_1||}{||a_2-a_1||}| = |r_1-||a_2-a_1||| = r_1-||a_1-a_2|| < r_1 < r_2$. לכן

$v \in B(a_2, r_2)$. אבל $r_1 = ||r_1\frac{a_2-a_1}{||a_2-a_1||}|| = ||v-a_1||$, ולכן $v \notin B(a_1, r_1)$. סתירה.