פתרון תרגיל 4 מרוכבות תיכוניסטים תשעח

27 במאי 2018

1. נשתמש בנוסחת קושי.

(א) הפונקציה $f(z)=(z+1)^7$ אנליטית בתחום ששפתו $|z-1|=1$, הנקודה $z_0=1$ נמצאת בתוך התחום ולכן לפי נוסחת קושי:

$$\int\limits_{|z-1|=1}\frac{(z+1)^7}{z-1}dz=2\pi i\cdot f(1)=2\pi i\cdot(1+1)^7=256\pi i$$

(ב) הפונקציה $f(z)=e^z$ אנליטית בתחום ששפתו $|z|=1$, הנקודה $z=0$ נמצאת בתוך התחום ולכן לפי נוסחת קושי:

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^z}{z}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot e^0=2\pi i$$

(ג) שוב, הפונקציה $f(z)=e^z$ אנליטית בתחום ששפתו $|z|=5$, אך שתי הנקודות שמאפסות את המכנה – $\pm i$– נמצאות בתוך התחום. נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{z^2+1}=\frac{A}{z-i}+\frac{B}{z+i}\Longrightarrow\frac{1}{z^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{z-i}-\frac{1}{z+i}\right)$$

נקבל:

$$\int\limits_{|z|=5}\frac{e^z}{z^2+1}dz=\frac{1}{2i}\left(\int\limits_{|z|=5}\frac{e^z}{z-i}dz-\int\limits_{|z|=5}\frac{e^z}{z+i}dz\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים אפשר לחשב לפי נוסחת קושי:

$$=\frac{1}{2i}\left(2\pi i\cdot f(i)+2\pi i\cdot f(-i)\right)=\pi\left(e^i-e^{-i}\right)$$

(ד) הפונקציה $f(z)=\sin z$ אנליטית בתחום ששפתו $|z-1|=2$, אך שתי הנקודות שמאפסות את המכנה – $0,1$ – נמצאות בתוך התחום. נפרק לשברים חלקיים:

$$\frac{1}{z^2-z}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z}\Longrightarrow\frac{1}{z^2-z}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$$

נקבל:

$$\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z^2-z}dz=\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z-1}dz+\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z}dz$$

כל אחד מהאינטגרלים אפשר לחשב לפי נוסחת קושי:

$$\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z-1}dz+\int\limits_{|z-1|=2}\frac{\sin z}{z}dz=2\pi i\cdot f(1)+2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\sin 1$$

2. הפונקציה $f(z)=e^{kz}$ אנליטית בתחום ששפתו $|z|=1$, הנקודה $z_0=0$ נמצאת בתוך התחום ולכן לפי קושי:

$$\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{kz}}{z}dz=2\pi i\cdot f(0)=2\pi i\cdot e^0=2\pi i$$

מצד שני, מסילה שמתארת את התחום היא $\gamma(t)=e^{it}$, כאשר $t\in[0,2\pi]$. $f(\gamma(t))=\frac{e^{ke^{it}}}{e^{it}}$, $\gamma'(t)=ie^{it}$ ולכן לפי ההגדרה:

$$2\pi i=\int\limits_{|z|=1}\frac{e^{kz}}{z}dz=\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{ke^{it}}}{e^{it}}\cdot ie^{it}dt=i\cdot\int\limits_0^{2\pi}e^{k(\cos t+i\sin t)}dt$$

נקבל:

$$2\pi=\int\limits_0^{2\pi}e^{k\cos t}e^{ik\sin t}dt=\int\limits_0^{2\pi}e^{k\cos t}\left(\cos(k\sin t)+i\sin(k\sin t)\right)dt$$

נשווה בין החלקים הממשיים והחלקים המדומים:

$$2\pi=\int\limits_0^{2\pi}e^{k\cos t}\left(\cos(k\sin t)\cos t\right)dt,\quad 0=\int\limits_0^{2\pi}e^{k\cos t}\sin(k\sin t)\,dt$$

כנדרש.

3. נסמן: $\Gamma' = \Gamma_t + A + B + C$, כאשר:

$$\Gamma_t = \{x + ai | t \leq x \leq -t\}$$
$$A = \{-t + (a - s)\, i | 0 \leq s \leq a\}$$
$$B = [-t, t]$$
$$C = \{t + si | 0 \leq s \leq a\}$$

שימו לב שהקבוצות A, B, C תלויות ב־t גם הן. Γ' מתארת מלבן שאחת מצלעותיו על ציר ה־x והכיוון הוא נגד כיוון השעון. לכן, מתקיים: $\Gamma_t \longrightarrow -\Gamma$ כאשר $t \longrightarrow \infty$ (כי הכיוונים הפוכים).
לפי אדיטיביות האינטגרל, נקבל:

$$\int\limits_{\Gamma'} f(z)\, dz = \int\limits_{\Gamma_t} f(z)\, dz + \int\limits_{A} f(z)\, dz + \int\limits_{B} f(z)\, dz + \int\limits_{C} f(z)\, dz$$

f אנליטית בתחום ששפתו Γ', ולפי קושי־גורסה האינטגרל באגף שמאל יתאפס. מה יקרה לכל אחד מהאינטגרלים כאשר $t \longrightarrow \infty$?
ראשית, עבור B:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \int\limits_{B} f(z)\, dz = \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

שנית, האורך של A הוא a, ולכן לפי משפט ההערכה:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \left| \int\limits_{A} f(z)\, dz \right| \leq \lim_{t \longrightarrow \infty} a \cdot \max_{z \in A} |f(z)| = a \cdot \lim_{t \longrightarrow \infty} \max_{z \in A} |f(z)| = 0$$

כאשר $t \longrightarrow \infty$, גם $z \longrightarrow \infty$, ולפי הנתון כאשר $z \longrightarrow \infty$, $f(z) \longrightarrow 0$. באופן דומה, גם האינטגרל על C שואף ל־0.
עבור Γ_t:

$$\lim_{t \longrightarrow \infty} \int\limits_{\Gamma_t} f(z)\, dz = -\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz$$

סה"כ, כאשר נשאיף $t \longrightarrow \infty$ בשוויון בו התחלנו, נקבל:

$$0 = -\int\limits_{\Gamma} f(z)\, dz + \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx$$

וכשנעביר אגף נקבל את הדרוש.