חודא 1 להנדסה תשפב מועד א

24 בינואר 2022

1. חשבו את הגבולות הבאים:

(א) $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin(2x+1))(1-\cos(3x))}{\ln(1+7x)\sin(5x)(1+x^2)}$

פתרון: נציג את הגבול כמכפלה של גבלות ידועים

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\sin(2x+1)\right)\left(1-\cos(3x)\right)}{\ln(1+7x)\sin(5x)\left(1+x^2\right)} = \lim_{x\to 0}\ln\left(\sin(2x+1)\right)\cdot\frac{\left(1-\cos(3x)\right)}{(3x)^2}\cdot\frac{7x}{\ln(1+7x)}\cdot\frac{5x}{\sin(5x)}\cdot\frac{1}{(1+x^2)}\cdot\frac{(3x)^2}{7x\cdot 5x}$$
$$= \ln\left(\sin(1)\right)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{1}\cdot\frac{9}{35} = \frac{9}{70}\ln\left(\sin(1)\right)$$

(ב) $\lim_{x\to 0}\left(e^x-x\right)^{\frac{1}{x^2}}$

פתרון: כיוון ש $\lim_{x\to 0}e^x-x=1$ נוכל להשתמש בכלל e. נחשב

$$L=\lim_{x\to 0}\left(e^x-x-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}$$

ואז התשובה הסופית היא e^L.

$$L=\lim_{x\to 0}\left(e^x-x-1\right)\cdot\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-x-1\right)}{x^2}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x-1\right)}{2x}\underbrace{=}_{\frac{0}{0},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^x\right)}{2}=\frac{1}{2}$$

ולכן הגבול המבוקש הוא $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

(ג) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^{2n}}{\sqrt{n!}}$

פתרון: כיוון ש

$$\frac{n^{2n}}{\sqrt{n!}}\geq\frac{n^{2n}}{n!}=\frac{\left(n^n\right)^2}{n!}=n^n\cdot\frac{n^n}{n!}\geq n^n\cdot 1\to\infty$$

נסיק לפי חצי-סנוויץ גם $\frac{n^{2n}}{\sqrt{n!}}\to\infty$.

.2

(א) חשבו $\int\frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x$.

פתרון: נשתמש באינטגרציה בחלקים:

$$\int\frac{\arctan(x)}{x^2}\mathrm{d}x=\left\{\begin{array}{ll} f=\arctan(x) & g'=\frac{1}{x^2}\\ f'=\frac{1}{1+x^2} & g=-\frac{1}{x}\end{array}\right\}=-\frac{\arctan(x)}{x}-\int-\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=-\frac{\arctan(x)}{x}+\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$$

נחשב את $\int \frac{1}{x(1+x^2)}\mathrm{d}x$ ונחבר הכל ביחד. לפי פירוק לשברים חלקים, קיימים A,B,C כך ש

$$\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$

נעשה מכנה משותף

$$1=A\left(1+x^2\right)+\left(Bx+C\right)x$$

נציב $x=0$ לקבל ש $A=1$ ולכן

$$1=\left(1+x^2\right)+\left(Bx+C\right)x$$

כלומר

$$0=x^2+\left(Bx+C\right)x=x^2\left(1+B\right)+Cx$$

מהשוואת מקדמים נקבל ש $B=-1$ ו $C=0$. לכן

$$\int\frac{1}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x=\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int\frac{-x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$$

ולכן האינטגרל בשאלה הוא

$$-\frac{\arctan(x)}{x}+\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C$$

(ב) קבוע האם האינטגרל הבא מתכנס או לא $\int_1^\infty\frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$.

פתרון: הוכחה: כיוון ש

$$\frac{\frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2}}=x^2\cdot\frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}=\frac{x^2}{x^2}\frac{\arctan(e^x)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}=\frac{\arctan(e^x)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\xrightarrow{x\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{1+0}=\frac{\pi}{2}$$

נקבל ש $\displaystyle\int_1^\infty\frac{\arctan(e^x)}{x^2+1}\mathrm{d}x$ ו $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ חברים (שני האינטגרלים חיובים ב $(1,\infty)$ ולכן אפשר להשתמש במבחן ההשוואה הגבולי). בגלל ש $\int_1^\infty\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ מתכנס כך גם האינטגל שבשאלה.

3. עבור הפונקציה $f(x)=x^x$ המוגדרת לכל $x>0$, ענו על הבאים:

(א) מצאו את תחומי העליה והירידה של f.

פתרון: כיוון ש

$$x^x=e^{\ln(x^x)}=e^{x\ln x}$$

נקבל ש:

$$f'(x)=\left(e^{x\ln x}\right)'=e^{x\ln x}\cdot\left(\ln x+x\cdot\frac{1}{x}\right)=x^x\cdot(\ln x+1)$$

ולכן $f'=0$ אמ"מ $\ln x+1=0$ (כי $x^x>0$) שזה קורה רק עבור $x=e^{-1}$. מהטבלה

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{e}$	1
$f'(x)$	Ud	$-$	0	$+$

נסיק כי f יורדת בקטע $(0,\frac{1}{e})$ ועולה בקטע $\left(\frac{1}{e},\infty\right)$. בנוסף, נסיק כי $x=\frac{1}{e}$ נקודת מינימום של f.

(ב) לכל a ממשי, מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $f(x)=a$.

פתרון: ראינו בסעיף קודם כי $x=\frac{1}{e}$ נקודת מינימום של f. לכן הערך המינימאלי הוא

$$f(\frac{1}{e})=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$$

כעת

$$\lim_{x\to 0^+} x^x=\lim_{x\to 0^+} e^{\ln(x^x)}=\lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x}=e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x}=e^0=1$$

מכיוון ש

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\underbrace{=}_{\frac{\infty}{\infty},\text{L'Hopital}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}-x=0$$

לכן:

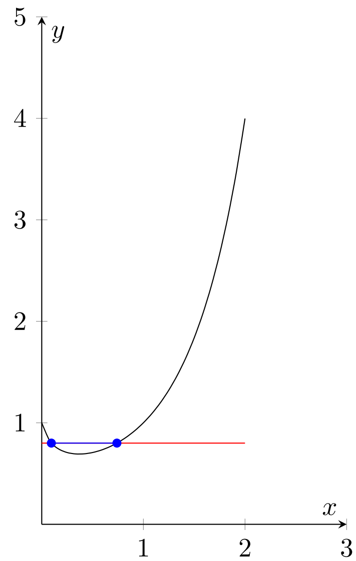
- לכל $a<\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ לא יהיה פתרון ל $f(x)=a$ כי $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ הערך המינמאלי של f
- עבור $a=\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ יהיה פתרון אחד ל $f(x)=a$ כיוון שזה הערך המינמאלי של f ולכל x אחר מתקיים $f(x)>\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}$ (כי f עולה/יורדת ממש מימין/משמאל ל $\frac{1}{e}$.
- לכל $\left(\frac{1}{e}\right)^{\frac{1}{e}}<a<1$ יהיו שני פתרונות ל $f(x)=a$ מכיוון שבקטע $(0,\frac{1}{e})$ הפונקציה יורדת ממש ולכן בקטע זה יכול להיות לכל היותר פתרון אחד. בנוסף, יהיה פתרון אחד מכיוון ש $\lim_{x\to 0^+} x^x=1$ ולכן קיים $0<c<\frac{1}{e}$ עבורו $1>f(c)>a$ ולכן בקטע $[c,\frac{1}{e}]$ הפונקציה f רציפה ולכן לפי משפט ערך הביניים בקטע זה מתקבל הערך a. לכן יש בדיוק פתרון אחד בקטע $(0,\frac{1}{e})$. בנוסף בקרן $(\frac{1}{e},\infty)$ הפונקציה עולה ממש ולכן לכל היותר פתרון אחד בקרן. ומכיוון ש

$$\lim_{x\to\infty} x^x=\infty$$

קיים $\frac{1}{e}<d$ כך ש $f(d)>a$ לכן בקטע $[\frac{1}{e},d]$ יש פתרון ל $f(x)=a$ (בגלל ש f רציפה שם ו $f(\frac{1}{e})<a,f(d)>a$). לכן סה"כ יהיה 2פתרונות בדיוק

- עבור $a=1$ נקבל פתרון אחד ל $f(x)=a$ שהרי בקטע $(0,\frac{1}{e})$ לא יהיה פתרון כי הפונקציה יורדת ממש בקטע זה ו $\lim_{x\to 0^+} x^x=1$. ובקרן $(\frac{1}{e},\infty)$ יהיה פתרון אחד מנימוקים דומים לבולט הקודם.
- עבור $a>1$ נקבל פתרון אחד ל $f(x)=a$ בדומה לבולט קודם.

בציור, זה נקודות חיתוך בין הקו האדום (שמייצג $y=0.8$) לבין הקו השחור (שמייצג $y=x^x$)



.

4. תהא f הגזירה בקרן $(1,\infty)$.

(א) הוכיחו או הפריכו: אם $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$.

פתרון: הפרכה: $f(x)=\ln(x)$ מקיימת כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ אבל

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty\neq 0$$

(ב) הוכיחו או הפריכו: אם $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ אז $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)=0$.

פתרון: הפרכה: $f(x)=\frac{1}{x}\sin\left(e^x\right)$ מקיימת כי

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

כי זוהי חסומה כפול אפסה.

מצד שני: $f'(x)=-\frac{1}{x^2}\sin(e^x)+\frac{e^x}{x}\cos(e^x)$. ומתקיים

$$\lim_{x\to\infty}-\frac{1}{x^2}\sin(e^x)=0$$

כי זוהי חסומה כפול אפסה ולכן אם נניח בשלילה כי $\lim_{x\to\infty} f'(x)=0$ נקבל כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}\cos(e^x)=0$$

כהפרש של שני אפסות. אבל עבור הסדרה $a_n=\ln\left(2\pi n\right)\to\infty$ נקבל

$$\frac{e^{a_n}}{a_n}\cos(e^{a_n})=\frac{e^{a_n}}{a_n}\cdot 1\to\infty$$

שהרי $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$ לפי משפט סדרי גודל ובפרט עבור $\frac{e^{a_n}}{a_n}\to\infty$ ולכן $\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}\cos(e^x)\neq 0$.

5. תהא סדרה a_n המקיימת $a_{n+1}=a_n^2+a_n+\frac{a_n}{n^2}$ לכל n טבעי. בנוסף $a_1=\frac{1}{10}$.

(א) הוכיחו כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.

פתרון:טענה: $a_n>0$ חיובית. הוכחה: באינדוקציה: $a_1=\frac{1}{10}$ חיובית. בנוסף, אם a_n חיובית אז

$$a_{n+1}=a_n^2+a_n+\frac{a_n}{n^2}$$

גם חיובית כסכום של מספרים חיוביים.

כעת, לפי הגדרת הסדרה $a_{n+1}=a_n^2+a_n+\frac{a_n}{n^2}$ לכל n טבעי ולכן

$$a_{n+1}-a_n=a_n^2+\frac{a_n}{n^2}\geq 0$$

ולכן הסדרה עולה.

(ב) מצאו את גבול הסדרה, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

פתרון: **אם** הסדרה חסומה היא מתכנסת לגבול סופי L, כלומר $a_n\to L$ ואז גם $a_{n+1}\to L$ ואז לפי הגדרת הסדרה

$$L\leftarrow a_{n+1}=a_n^2+a_n+\frac{a_n}{n^2}\to L^2+L+0$$

ולכן $L=L^2+L$ ששקול ל $L^2=0$. כיוון שהפתרון היחיד הוא $L=0$ זה גם הגבול. אבל הסדרה עולה ולכן $a_n\geq a_1=\frac{1}{10}>0$ לכן

$$L=\lim a_n\geq a_1>0$$

סתירה. לכן הסדרה אינה חסומה והיא עולה ולכן גבולה הוא ∞.

6.

(א) חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}$$

פתרון: מתקיים ש

$$\frac{2k}{n^2+k^2}=\frac{n}{n^2}\cdot\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\frac{k^2}{n^2}\right)}=\frac{1}{n}\cdot\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}$$

לכן

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{n^2+k^2}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{2\left(\frac{k}{n}\right)}{\left(1+\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)$$

עבור $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$. מכיוון ש f רציפה ב $[0,1]$ אז לפי משפט מההרצאה

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x=\ln\left(1+x^2\right)|_0^1=\ln 2-\ln 1=\ln 2$$

(ב) קרבו את $\sqrt[3]{9}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

פתרון: נשתמש בפיתוח טיילור של $f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ סביב $a = 8$ ונרצה לקרב את $f(9)$.

$$f(x) = x^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f(8) = 2$$
$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(8) = \frac{1}{3}\frac{1}{2^2} = \frac{1}{12}$$
$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \Rightarrow f''(c) = -\frac{2}{9}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{c}\right)^5}$$

עבור $n = 1$, פולינום טיילור הוא

$$f(a) + f'(a) \cdot (x-8) = 2 + \frac{1}{12}(x-8)$$

והקירוב הוא

$$2 + \frac{1}{12}(x-8) = 2 + \frac{1}{12}(9-1) = 2\frac{1}{12}$$

בנוסף, השגיאה (שארית לגרנז) היא

$$f(9) - 2\frac{1}{12} = \frac{f'(c)}{2!}(9-8)^2$$

עבור $8 < c < 9$ ולכן

$$\left|\frac{f'(c)}{2!}(9-8)^2\right| = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{c}\right)^5} \leq \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{8}\right)^5} = \frac{1}{9}\frac{1}{2^5} = \frac{1}{288}$$

כאשר אי השיוון נובע מכך ש $x^{\frac{1}{3}}$ פונקציה עולה בקטע $[8,9]$ (וגם x^5 ולכן גם $x^{\frac{5}{3}}$) ולכן הערך המינימאלי שלה הוא $\sqrt[3]{8} = 2$ ולכן $\frac{1}{\left(\sqrt[3]{c}\right)^5} \leq \frac{1}{2^5}$ כי מחלקים בערך קטן יותר. מכיוון ש $\frac{1}{288} < \frac{1}{100}$ קיבלנו שהקירוב $2\frac{1}{12}$ עונה על דירשות השאלה.