מרחבי מנה - המשך

ניקח לדוגמה את הריבוע $[0,1]\times[0,1]$.

- הריבוע עצמו הומאומורפי לעיגול סגור - $[0,1]\times[0,1]\cong D^2\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|x^2+y^2\leq 1\right\}$
- נגדיר שכל נקודה בצלע התחתונה שקולה למקבילה לה בצלע העליונה: $(t,0)\sim(t,1)$. זה אומר שאפשר להדביק את שתי הצלעות - ולקבל גליל. אם נגדיר אותו דבר גם על הצלע השמאלית והימנית - $(0,t)\sim(1,t)$ - נוכל להדביק גם אותן(שהפכו לבסיסים של הגליל) - ולקבל טורוס.
- אם ניקח יחס שקילות שבו "נהפוך" הצלע העליונה - $(t,0)\sim(1-t,1)$ - נקבל "טבעת מביוס".
- אם נצמיד שתי צלעות סמוכות - $(t,0)\sim(0,t)$ - נקבל משהו דומה לחרוט עם בסיס נטוי(הפנים של הבסיס לא חלק ממה שמקבלים), שהוא הומאומורפי לעיגול סגור.
- אם נצמיד שתי סמוכות, אבל נהפוך אחת מהן - $(t,0)\sim(0,1-t)$ - נקבל שוב טבעת מביוס. הרעיון הוא שחותכים על האלכסון ומדביקים לפי השקילות $(t,0)\sim(0,1-t)$ - ומכיוון שהחיתוך על האלכסון יוצר שקילות, מקבלים מקבילית עם שני צלעות נגדיות שקולות הפוך.
- אם נצמיד שתי צלעות מקבילות ישר, ואת שתי הצלעות המקבילות האחרות נצמיד הפוך - $\begin{matrix}(t,0)\sim(t,1)\\(0,t)\sim(1,1-t)\end{matrix}$ - נקבל בקבוק קליין. אי אפשר לבנות דבר כזה ב$\mathbb{R}^3$, רק ב$\mathbb{R}^4$ - כשהופכים צד אחד, ואז מנצלים את המימד הרביעי בשביל להכניס אותו לתוך הגליל בלי לחתוך אותו - וככה שני הבסיסים יבואו מאותו כיוון ויתחברו בכיוון הסיבוב הנכון.

  הערה: גם אם לא היינו יכולים לשכן את המרחב הזה בשום $\mathbb{R}^n$ - הוא עדיין קיים מבחינה טופולוגית.
- אם נצמיד כל זוג צלעות מקבילות הפוך - $\begin{matrix}(t,0)\sim(1-t,1)\\(0,t)\sim(1,1-t)\end{matrix}$ - נקבל עיגול ששני חצאי המעגלים שלו מוצמדות הפוך. המרחב הזה נקרא מישור פרוייקטיבי.
- אם נצמיד שני זוגות של צלעות סמוכות - $\begin{matrix}(t,0)\sim(0,t)\\(t,1)\sim(1,t)\end{matrix}$ - נקבל ספירה דו מימדית - S^2.

אלו כל המרחבים שניתן לקבל מהריבוע $[0,1]\times[0,1]$ - אבל יש דרכים נוספות לחבר, שבעזרתן ניתן לקבל את המרחבים הנ"ל בדרכים אחרות.

הגדרה

יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים.
$f:X\to Y$ נקראת "העתקת מנה" אם:

1. f על

2. $U \subseteq Y$ פתוחה בY אם"ם $f^{-1}\left(U\right)$ פתוחה בX.

הערה: תנאי 2 הוא דרישה יותר חזקה מרציפות - רציפות דורשת רק כיוון אחד.

ההערה

ההעתקה $\rho : X \to \hat{X}$ היא העתקת מנה - היא על כי לכל קבוצת מנה(איבר ב$\hat{X}$) יש איבר בX, והיא מקיימת את תנאי 2 כי ככה הגדרנו את הטופולוגיה על $\hat{X}$.

טענה

אם $f : X \to Y$ העתקת מנה, נגדיר יחס שקילות על X באופן הבא: $a \sim b$ אם $f\left(a\right) = f\left(b\right)$.

הערה

ההבדל בין ρ להעתקת מנה הוא כמו ההבדל בין $A \subseteq X$ לשיכון $X \to Y$.

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\rho"'] \arrow[dr, "f"] & \\
\hat{X} \arrow[r, "\hat{f}"'] & Y
\end{tikzcd}$$

טענה

$f : X \to Y$ העתקת מנה אם"ם מתקיימים שני התנאים הבאים:

1. f על
2. $S \subseteq Y$ סגורה בY אם"ם $f^{-1}\left(S\right)$ סגורה בX

הוכחה: תרגיל

רמז: $f^{-1}\left(A^c\right) = \left(f^{-1}\left(A\right)\right)^c$

טענה

הרכבה של העתקות מנה היא העתקת מנה.

הוכחה

יהיו $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ שתי העתקות מנה.

1. הרכבה של העתקות על היא על.
2. תהי $A \subseteq Z$. A פתוחה אס"ם $g^{-1}(A)$ פתוחה, וזה נכון אס"ם $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$ פתוחה. אולם $f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right) = (g \circ f)^{-1}(A)$. כלומר קיבלנו A פתוחה אס"ם $(g \circ f)^{-1}(A)$ פתוחה.

משפט

1. אם f על רציפה ופתוחה אז f העתקת מנה
2. אם f על רציפה וסגורה אז f העתקת מנה

הוכחה

1. תהי $f : X \to Y$ על רציפה ופתוחה.

   א. נתון שf על.

   ב. $\Leftarrow$ תהי $A \subseteq Y$ פתוחה. אזי כיוון שf רציפה גם $f^{-1}(A)$ פתוחה.
   $\Rightarrow$ תהי $A \subseteq Y$ קבוצה המקיימת $f^{-1}(A)$ פתוחה. צ"ל שA פתוחה. f העתקה פתוחה לכן $f\left(f^{-1}(A)\right)$ פתוחה, אולם f היא על ולכן $f\left(f^{-1}(A)\right) = A$.

2. תרגיל(רמז: טיעון זהה לנ"ל)

מסקנה

יהי X מ"ט קומפקטי, Y מ"ט האוסדורף, $f : X \to Y$ על ורציפה.
אזי f היא העתקת מנה.

הוכחה

f רציפה מX קומפקטי לY האוסדורף, ולכן f סגורה.

על $\mathbb{R}$ נגדיר יחס שקילות: לכל x, $x \sim -x$.

טענה

$$\hat{\mathbb{R}} \cong [0, \infty)$$

הוכחה

נגדיר $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ ע"י $f(t)=|t|$.

f מכבד את יחס השקילות ולכן משרה העתקה רציפה $\hat{f}:\hat{\mathbb{R}}\to[0,\infty)$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & {[0,\infty)} \\ & \hat{\mathbb{R}} \arrow[ur, "\hat{f}"'] & \end{tikzcd}$$

$\hat{f}(\{x,-x\})=|x|$.

טענה: $\hat{f}$ הומאומורפיזם

הוכחה: נגדיר $g:[0,\infty)\to\hat{\mathbb{R}}$ ע"י $g:=\rho\cdot i$.[1]

g רציפה כי היא הרכבה $\rho\circ i$ של שתי העתקות רציפות, ונא לוודא ש $g\circ\hat{f}=\mathrm{Id}_{\hat{\mathbb{R}}}$, $\hat{f}\circ g=\mathrm{Id}_{[0,\infty)}$.

---

[1] $i:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ העתקת ההכלה, $\rho:\mathbb{R}\to\hat{\mathbb{R}}$ העתקה הקנונית של מרחב המנה.

תכונות הפרדה

הפרדה במרחב טופולוגי זה האפשרות להפריד דברים באמצעות קבוצות פתוחות.

- ראינו את תכונת האוסדורף - T_2 - שבה אפשר להפריד שתי נקודות באמצעות שתי קבוצות פתוחות זרות.
- ראינו גם תכונה יותר חלשה - T_1 - שבה כל נקודון סגור

$$T_2 \Rightarrow T_1$$

גם את T_1 ניתן לבטא כתכונת הפרדה: לכל $a, b \in X$ יש U פתוחה כך ש$a \in U, b \notin U$.

נרצה להמשיך הלאה, למצוא תכונות הפרדה יותר ויותר עדינות - $T_4 \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1$

הגדרות

(א) מ"ט X יקרא T_3 אם:

1. X הוא T_1.
2. לכל נקודה $a \in X$ ולכל קבוצה סגורה $S \subseteq X$ המקיימים $a \notin S$ קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש$a \in U, S \subseteq V$.

(ב) מ"ט X נקרא T_4 אם:

1. X הוא T_1.
2. לכל שתי קבוצות סגורות זרות S, T קיימות קבוצות פתוחות זרות U, V כך ש$S \subseteq U, T \subseteq V$.

נשים לב שT_3 הוא גם T_2(נבחר את הקבוצה הסגורה להיות נקודון) וT_4 הוא גם T_3(נבחר אחת מהקבוצות הסגורות להיות נקודון).

משפט

כל מרחב מטרי הוא T_4

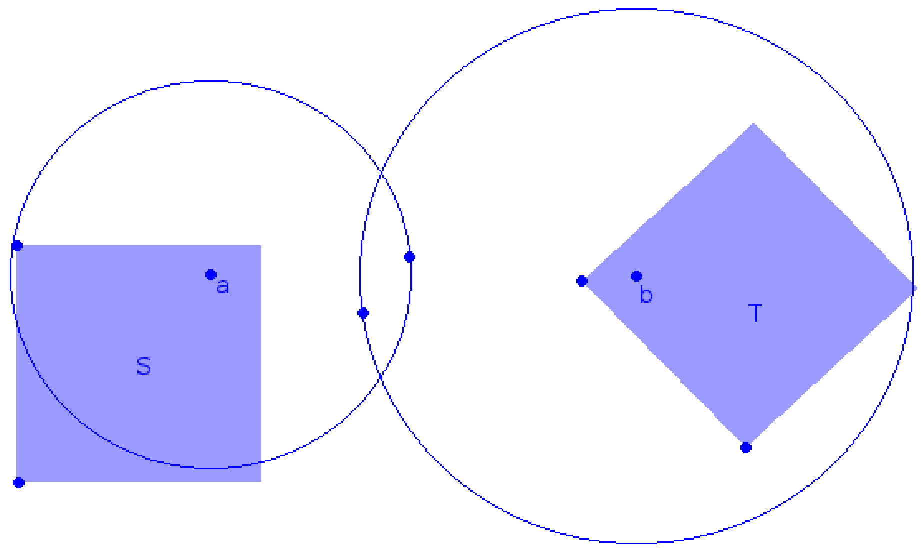
הוכחה

1. מרחב מטרי הוא T_2 ולכן T_1.
2. יהיו S, T קבוצות סגורות זרות.

לכל $a \in S$ מתקיים $a \in T^c$ שהיא קבוצה פתוחה. לכן יש $\varepsilon_a > 0$ כך ש$B(a, \varepsilon_a) \subseteq T^c$, כלומר $B(a, \varepsilon_a)$ זר לT.

לכל $a \in S$ נבחר ε כזה. באותו אופן לכל $b \in T$ נבחר $\delta_b > 0$ כך ש$B(b, \delta_b)$ זר לS.

הערה: אמנם נראה שעכשיו ניתן לבחור את הקבוצות $\bigcup B\left(a,\varepsilon_a\right)$ ו-$\bigcup B\left(b,\varepsilon_b\right)$ - אבל לא מובטח לנו שהן זרות! יכולה להיות חפיפה בין הכדורים:



נגדיר:

$$U=\bigcup_{a\in S}B\left(a,\frac{\varepsilon_a}{2}\right)\qquad V=\bigcup_{b\in T}B\left(b,\frac{\delta_b}{2}\right)$$

מתקיים $S\subseteq U,T\subseteq V$. נראה ש-$U\cap V=\emptyset$.

הוכחה: נניח בשלילה $z\in U\cap V$. כלומר יש $a\in S,b\in T$ כך ש-$d\left(z,a\right)<\frac{\varepsilon_a}{2},d\left(z,b\right)<\frac{\varepsilon_b}{2}$. נניח בה"כ ש-$\delta_b\le\varepsilon_a$. נקבל:

$$d\left(A,b\right)<\frac{\varepsilon_a}{2}+\frac{\delta_b}{2}\le\delta_b$$

כלומר $a\in B\left(b,\delta_b\right)$, בסתירה לכך ש-$B\left(b,\delta_b\right)$ זר ל-S.

משפט

יהי X מ"א האוסדורף קומפקטי. אזי X הוא T_4

הוכחה

בשני שלבים:

שלב א': נוכיח ש-X T_3

שלב ב': נוכיח ש-X T_4

שלב א

נניח S סגורה, $a \notin S$.

לכל $x \in S$ כיוון שX האוסדורף יש קבוצות פתוחות זרות U_x, V_x כך ש$x \in U_x$ ו$a \in V_x$.

עבור כל $x \in S$ נבחר U_x, V_x כאלה. מתקיים שהאוסף $\{U_x\}_{x \in S}$ הוא כיסוי פתוח של S בX.

S סגורה במרחב X שהוא קומפקטי, ולכן S קומפקטי ולכן יש תת כיסוי סופי בX, כלומר יש $x_1, x_2, \dots x_n$(אוסף סופי) כך ש

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{x_i} \supseteq S$$

אם ניקח $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{x_i}$ אז $a \in V$ וגם נראה שמתקיים $U \cap V = \emptyset$ כי $U_{x_i} \subseteq V_{x_i}^c$ לכן $\bigcap_i V_{x_i}^c = \bigcup_i V_{x_i}^c \supseteq \bigcup_i U_{x_i} \Leftarrow U \cap V = \emptyset$.

שלב ב - כמעט בדיוק אותו דבר:

נניח S סגורה, T סגורה, $S \cap T = \emptyset$.

לכל $x \in S$ כיוון שX T_3 יש קבוצות פתוחות זרות U_x, V_x כך ש$x \in U_x$ ו$T \subseteq V_x$.

עבור כל $x \in S$ נבחר U_x, V_x כאלה. מתקיים שהאוסף $\{U_x\}_{x \in S}$ הוא כיסוי פתוח של S בX.

S סגורה במרחב X שהוא קומפקטי, ולכן S קומפקטי ולכן יש תת כיסוי סופי בX, כלומר יש $x_1, x_2, \dots x_n$(אוסף סופי) כך ש

$$U = \bigcup_{1 \leq i \leq n} U_{x_i} \supseteq S$$

אם ניקח $V = \bigcap_{1 \leq i \leq n} V_{x_i}$ אז $T \subseteq V$ וגם נראה שמתקיים $U \cap V = \emptyset$ כי $U_{x_i} \subseteq V_{x_i}^c$ לכן $\bigcap_i V_{x_i}^c = \bigcup_i V_{x_i}^c \supseteq \bigcup_i U_{x_i} \Leftarrow U \cap V = \emptyset$.