מסלולים קלים ביותר בין כל זוגות הקודקודים

מקודקוד אחד אנו יודעים לעשות:

- $Dijkstra$ ב$O\left(|E|+|V|\log|V|\right)$ או ב$O\left(|V|^2\right)$ אם משתמשים במערך). לכן אם נריץ מכל הקודקודים זה יקח $O\left(|V||E|+|V|^2\log|V|\right)$ (או במ- $O\left(|V|^3\right)$ ערך)
- $Belman-Ford$ ב$O\left(|V||E|\right)$ - לכן אם נריץ מכל הקודקודים זה יקח $O\left(|V|^2|E|\right)$.

איך נעשה את זה יותר יעיל?
נגדיר:

- בגרף דחוס מספר הקשתות הוא $|E|=\theta\left(|V|^2\right)$
- בגרף דליל מספר הקשתות הוא $|E|=O\left(\frac{|V|^2}{\log|V|}\right)$

פתרון תכנות דינאמי

ממספרים את הקודקודים $\{1,...n\}$. הגרף מיוצג כמטריצת שכנויות: $W_{ij}=\begin{cases}0 & i=j\\ w(i,j) & (i,j)\in E\\ \infty & (i,j)\notin E\end{cases}$.

הפלט: מטריצה $D=\{d_{ij}\}$ כך ש$d_{ij}=\delta(i,j)$.
נבנה אלגוריתם תכנות דינאמי:
נסמן ב$d_{ij}^{(m)}$ את המסלול הקל ביותר בין i לj המשתמש בm קשתות לכל היותר.
$D^{(m)}=\left\{d_{ij}^{(m)}\right\}$. $D^{(n-1)}$ יתן לנו את התשובה הסופית.

$$d_{ij}^{(m)}=\min\left\{d_{ij}^{(m-1)},\min_{1\le k\le n}\left\{d_{ij}^{(m-1)}+w(k,j)\right\}\right\}=...$$

אבל $w(i,i)=0$, ולכן

$$...=\min_{1\le k\le n}\left\{d_{ij}^{(m-1)}+w(k,j)\right\}$$

מטריצה התחלתית: $D^{(0)}$: $d_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0 & i=j\\ \infty & i\neq j\end{cases}$:

$$D^{(0)}=\left(\quad\right),D^{(1)}=\left(\quad\right),...D^{(n-1)}=\left(\quad\right)$$

זמן הריצה - $O\left(n^4\right)$.

שיפור באמצעות כפל מטריצות

$$d_{ij}^{(m)}=\min_{1\le k\le n}\left\{d_{ik}^{(m-1)}+\overbrace{D_{kj}^{(1)}}^{=w(k,j)}\right\}$$

כלומר מ$D^{(1)},D^{(m-1)}$ ניתן להגיע ל$D^{(m)}$.

נתונה הבעיה: להעלות מטריצה בחזקה A^n(כשA מט' $n\times n$)

$$A,A^2,A^4,A^8,...$$

אם מעלים מטריצה בחזקה זה יעלה לנו $O\left(n^3\log n\right)$

לכן נשתמש ב:

$$d_{ij}^{(m)}=\sum_{k=1}^{n}d_{ik}^{(m-1)}d_{kj}^{(1)}$$

זמן הריצה: $O\left(n^3\log n\right)$, בצורה דומה להעלאת מט' בחזקה.

אלגוריתם Floyd-Warshall ($O\left(n^3\right)$)

זה גם אלגוריתם תכנות דינמי, כאשר בשלב הk נשתמש רק בקודקודים $\{1,...k\}$.

הגדרה

- בהינתן מסלול $p=\{v_1,...v_k\}$ הקודקודים $\{v_2,...v_{k-1}\}$ הם הקודקודים הפנימיים במסלול.
- מסלול k פנימי הוא מסלול שהקודקודים הפנימיים בו הם מתוך הקבוצה $\{1,...k\}$
- מסלול k פנימי $\Leftarrow$ מסלול $k+1$ פנימי
- מסלול 0 פנימי $\Leftarrow$ מסלול ללא קודקודים פנימיים.

נגדיר

$d_{ij}^{(k)}$=המסלול הקל ביותר מi לj שקודקודיו הפנימיים הם מ$\{1,...k\}$

אתחול

$$d_{ij}^{(0)}=\begin{cases}0 & i=j\\ w\left(i,j\right) & (i,j)\in E\\ \infty & (i,j)\notin E\end{cases}$$

צעד

$$d_{ij}^{(k)}=\min\left\{d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}\right\}$$

בכל שלב מוסיפים עוד קודקוד לאפשרות הבחירה, ולכן בבחירת d_{ij} לכל i,j יש לנו שתי אפשרויות - להשאיר את המסלול הקודם, או להשתמש במסלול שבוחר גם את k. זה עולה $O\left(1\right)$ לכל זוג קודקודים.

האלגוריתם

<u>Floyd-Warshall</u>

$D^{(0)}\leftarrow W$

```
for k from 1 to n-1
    for i from 1 to n-1
        for j from 1 to n-1
```

$$d_{ij}^{(k)}\leftarrow\min\left\{d_{ij}^{(k-1)},d_{ik}^{(k-1)}+d_{ik}^{(k-1)}\right\}$$

`return` $D^{(n)}$

נשים לב שב$D^{(n)}$ כל הקודקודים יכולים להיות פנימיים.

זמן ריצה: $O\left(n^{3}\right)$

שחזור הפתרון

נגדיר מטריצה $\Pi^{(k)}=\left\{\pi_{ij}^{(k)}\right\}$ כאשר $\pi_{ij}^{(k)}$=הקודקוד לפני j במסלול הקל ביותר מi לj עם קודקודים פנימיים $\{1,...k\}$.

בכל עדכון של d_{ij}, אם בחרנו $d_{ij}^{(k)}=d_{ij}^{(k-1)}$ נבחר $\pi_{ij}^{(k)}=\pi_{ij}^{(k-1)}$, ואם בחרנו $d_{ij}^{(k)}=d_{ik}^{(k-1)}+d_{kj}^{(k-1)}$ נבחר $\pi_{ij}^{(k)}=\pi_{kj}^{m(k-1}$

סגור טרנזיטיבי

$G^{*}=(V,E^{*})$

$E^{*}=\{(i,j)\,|$ קיים מסלול מi לj ב$G\}$

נגדיר: $t_{ij}^{(k)}$=1 אם יש מסלול k-פנימי מi לj, אחרת 0.

נרצה לדעת את $t_{ij}^{(n)}$

$$t_{ij}^{(0)}=\begin{cases}1 & i=j\vee(i,j)\in E\\ 0 & (i,j)\notin E\end{cases}$$

$$t_{ij}^{(k)} \leftarrow t_{ij}^{(k-1)} \vee \left(t_{ik}^{(k-1)} \wedge t_{kj}^{(k-1)}\right)$$

זה גם $O\left(n^3\right)$, אבל מחשבים יודעים לעשות פעולות לוגיות יותר מהר מפעולות אר-יתמטיות.

$$d_{ij}^{(t)} \leftarrow \min\left\{d_{ij}^{(k-1)}, d_{ik}^{(k-1)} + d_{kj}^{(k-1)}\right\}$$

אפשר להחליף ב

$$d_{ij} \leftarrow \min\left\{d_{ij}, d_{ik} + d_{kj}\right\}$$

כי

$$d_{ik}^{(k)} = d_{ik}^{(k-1)}$$

BF עובד ב$O\left(|V|\,|E|\right)$. $Dijkstra$ עובד ב$O\left(|E| + |V| \log |V|\right)$, אבל רק אם אין קשתות שליליות. נרצה להתגבר על ההגבלה הזו.

אלגוריתם Johnson

נתון $G = (V, E)$ עם פונקציית משקלים $w : E \to \mathbb{R}$. נרצה למצוא פונקציית משקלים אחרת $w' : E \to \mathbb{R}$ - כלומר $G' = (V, E)$ עם w' - כך שיתקיימו התנאים הבאים:

1. $\forall_{(u,v)\in E} w'(u,v) \geq 0$
2. צריכים להישמר המסלולים הקלים ביותר:
מסלול p בין u לv הוא קל ביותר בG $\Leftrightarrow$ הוא קל ביותר בG'
3. יש מעגל בעל משקל שלילי בG $\Leftrightarrow$ יש מעגל בעל משקל שלילי בG'

נשתמש בפונקציה $h : V \to \mathbb{R}$ כך ש

$$(u,v) \in E : \quad w'(u,v) = w(u,v) + h(u) - h(v)$$

הוכחת 2

בהינתן מסלול $p : (v_1, \ldots v_k)$,

$$w(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(v_i, v_{i+1}) \text{ ב} G$$

$$w'(p) = \sum_{i=1}^{k-1} w(u,v) + h(v_1) - h(v_k) \text{ ב} G'$$

הוכחת 3

בהנתן מעגל $C = (v_1, ...v_k = v_1)$,

$$G' : w'(C) = w(C) + h(v_1) - h(h_1) = w(C)$$

הוכחת 1

$$w'(u,v) = w(u,v) + \delta(s,u) - \delta(s,v)$$

נרצה $w'(u,v) \geq 0$. לאי שוויון המשולש:

$$\delta(s,v) \leq \delta(s,u) + w(u,v)$$

$$\Rightarrow w(u,v) + \delta(s,u) - \delta(s,v) \geq 0$$

האלגוריתם

1) מוסיפים קודקוד s עם הקשתות כפי שתיארנו.

2) נריץ BF מs ונקבל $\delta(s,v)$ $\forall v$
←נותן לנו גם מעגלים שליליים. עולה $O(|V||E|)$

3) $\forall v \quad h(v) \leftarrow \delta(s,v)$

4) $w'(u,v) \leftarrow w(u,v) + h(u) - h(v)$

5) נריץ את $dijkstra$ מכל הקודקודים v. נמצא את $\delta(v,w)$ $\forall w$. עולה $O\left(|V||E| + |V|^2 \log|V|\right)$

6) $\delta(u,v) \leftarrow \delta(u,v) - h(u) + h(v)$.

סה"כ: $O\left(|V||E| + |V|^2 \log|V|\right)$